Associazione per l'Insegnamento della Fisica

31ª Edizione

Olimpiadi di Fisica 2017

PROGETTO OLIMPIADI

Gara Nazionale
Prova Teorica

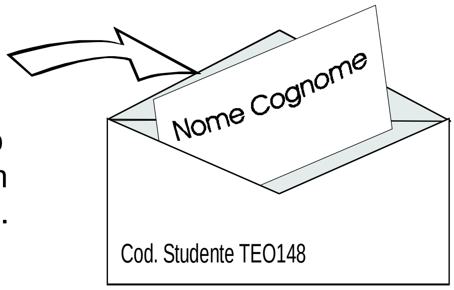
Venerdì 21 Aprile 2017

Liceo Statale "Medi"
Senigallia (AN)

Non sfogliare questo fascicolo finché l'insegnante non ti dica di farlo.
***Leggi* ATTENTAMENTE le istruzioni !**

ISTRUZIONI:

Tempo: 4 ore



1. Appena ti verrà dato il via, scrivi chiaro il tuo **NOME e COGNOME sul cartoncino** che hai ricevuto insieme ai fogli e alle buste, grande e piccola; poi inserisci il cartoncino nella busta piccola e chiudila. Metti subito la busta chiusa in quella grande, che userai alla fine per consegnare tutti i fogli.

Successivamente, NON dovrai scrivere il tuo nome su nessun foglio né sulle buste,

ma solo il "Codice Studente" !

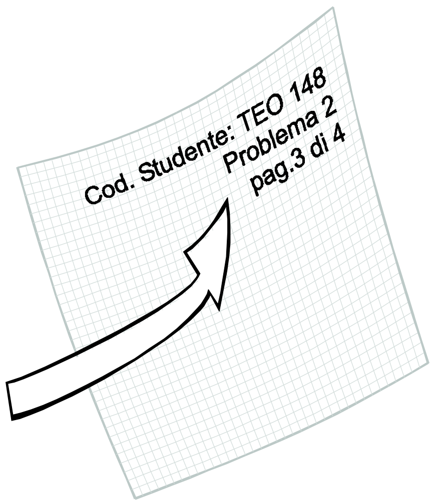
2. Leggi con cura i testi dei tre problemi proposti.

3. E' assolutamente necessario, per non rischiare di essere penalizzati, **utilizzare un foglio diverso per ogni problema.**

4. Su ogni facciata scrivi chiaramente in alto a destra:

- il tuo **Codice Studente**
- il **numero** del problema
- il **numero di pagina** (a partire da 1 per ogni problema)
- il **numero totale di pagine** usate per quel problema:

per esempio pag 3 di 4.



La Gara Nazionale è realizzata con il sostegno di

Comune di Senigallia

Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

Liceo Statale "Medi" Senigallia

LEGGI CON CALMA E MOLTA ATTENZIONE!

È assolutamente necessario ricordarsi di NON SCRIVERE il proprio nome su nessun foglio (ad esclusione del cartoncino che va chiuso nella busta piccola, come detto in copertina). Si dovrà invece SCRIVERE solo il proprio **Codice Studente** (riportato sulla busta piccola colorata) su ciascun **Foglio Riassuntivo** e su ogni foglio a quadretti utilizzato.

Insieme ai testi, per ogni problema ti è stato consegnato un **Foglio Riassuntivo** sul quale dovrai riportare in modo sintetico le risposte ad ogni domanda; i valori numerici devono essere scritti con il corretto numero di cifre, in relazione ai dati forniti e – se necessario – con indicazione dell'unità di misura.

È ESSENZIALE che tutti i risultati (formali e numerici) che hai trovato per ciascun problema siano riportati sul corrispondente **Foglio Riassuntivo**, poiché questo costituisce la base della valutazione della tua prova.

Ricordati di usare un foglio a quadretti diverso per ogni problema e di scrivere per prima cosa, in alto a destra, il tuo **Codice Studente**!

Sui fogli a quadretti devono essere riportate le soluzioni dettagliate, cercando di limitare il testo scritto e di privilegiare invece equazioni, simboli, numeri e diagrammi.

Su ogni facciata dei fogli a quadretti con la soluzione di un problema va sempre scritto, in alto a destra, il numero del problema, il numero di pagina e il numero totale di pagine utilizzate per quel problema, come descritto in copertina.

Infine un utile consiglio: tieni presente che non sempre la soluzione di una domanda richiede di aver risolto le domande precedenti.

NOTA importante sui DATI NUMERICI: I dati numerici forniti nei singoli problemi, qualunque sia il numero di cifre con cui vengono scritti, si devono considerare noti con un'incertezza dello $0.1\,\%$, salvo esplicita indicazione contraria. Le costanti fornite nella tabella generale si possono invece considerare note con incertezza trascurabile. Di conseguenza si scrivano i risultati numerici, quando richiesti, con un numero di cifre appropriato all'incertezza del risultato stesso.

Materiale elaborato dal Gruppo

PROGETTO OLIMPIADI

Segreteria delle Olimpiadi Italiane di Fisica

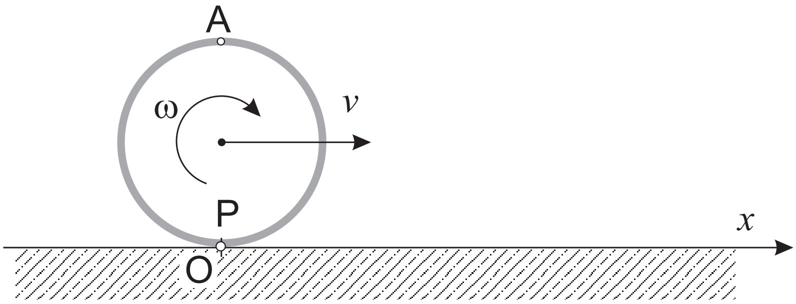
e-mail: `segreteria@olifis.it`
WEB: `www.olifis.it`

P1 Cilindro che slitta e rotola — Punti 100

Un cilindro cavo di spessore trascurabile, massa m e raggio R, trasla mentre ruota su un piano orizzontale. Si vuole studiare il comportamento di questo sistema fisico in condizioni diverse da quella di puro rotolamento.

L'asse x di traslazione è orientato verso destra e il verso orario mostrato in figura per la velocità angolare si assume positivo; l'origine O sull'asse di traslazione coincide con il punto P di contatto tra il cilindro e il piano all'istante $t = 0$.

In questo istante, la velocità di traslazione del centro di massa (CdM) è $v_0 > 0$ mentre la velocità angolare è $\omega_0 < 0$; in altre parole, inizialmente il cilindro sta strisciando mentre si muove verso destra lungo il piano e contemporaneamente ruota attorno al suo asse in senso antiorario, cioè in verso opposto a quello indicato in figura.



Inizialmente si supponga trascurabile ogni forma di attrito, in particolare l'attrito dinamico nel punto P di contatto fra il cilindro e il piano.

1. A che distanza dalla posizione iniziale si troverà il punto A del cilindro, dopo un giro di quest'ultimo?

Si consideri adesso che l'attrito dinamico, di coefficiente μ, nel punto P di contatto tra il cilindro e il piano non sia trascurabile, mentre lo siano sempre altre forme di attrito (volvente, viscoso).

2. Si scriva l'espressione della velocità V_P del punto P (punto della superficie del cilindro che in ciascun istante si trova a contatto con il piano) in termini della velocità v del CdM del cilindro e della velocità angolare ω. Si determini il modulo e il verso della forza d'attrito dinamico, spiegando quale condizione deve essere soddisfatta perché questa si annulli.

3. Si scrivano le funzioni $v(t)$ e $u(t) = R\,\omega(t)$ come espressioni esplicite del tempo t e si determini l'istante t_1 dopo il quale tali espressioni non sono più valide; si calcolino i valori delle due funzioni per $t = t_1$. Se ne traccino i grafici in uno stesso piano velocità-tempo, nell'intervallo di tempo $0 < t < t_1$, facendo in modo che siano rispettate le condizioni date sopra per i valori iniziali: $v_0 > 0$ e $\omega_0 < 0$.

4. Completare i grafici di $v(t)$ e $u(t)$ per $t > t_1$, con le stesse condizioni iniziali scelte sopra, giustificando il disegno fatto.

5. Determinare, in funzione di v_0, il valore particolare $\overline{\omega_0}$ della velocità angolare iniziale ω_0 per il quale ad un certo istante il cilindro si arresta definitivamente. Si determini tale istante t_0 e la posizione in cui il cilindro si arresta.

6. Mostrare che una scelta diversa di ω_0 avrebbe portato ad un'evoluzione diversa del moto del cilindro. Descrivere cosa cambia nei due casi $\omega_0 > \overline{\omega_0}$ e $\omega_0 < \overline{\omega_0}$.

7. Nel caso $\omega_0 = 2\,\overline{\omega_0}$ calcolare, in termini di m e v_0, il lavoro fatto dalla forza d'attrito tra l'istante iniziale e il tempo $t = 2t_1$, utilizzando il bilancio energetico.

P2 Spettro dell'idrogeno naturale Punti 100

AVVERTENZA: *In questo problema si tenga presente che i dati numerici che vengono forniti con almeno 5 cifre significative vanno considerati con un'incertezza relativa di* 10^{-5}.

L'osservazione delle righe dello spettro dell'idrogeno che cadono nel visibile e la misura delle relative lunghezze d'onda hanno avuto un posto centrale nello sviluppo dei modelli per la struttura atomica. In questo problema ci occuperemo della riga rossa, la cosiddetta riga Hα, la cui lunghezza d'onda, misurata in aria, vale $\lambda_{\mathrm{a}} = 656.28\,\mathrm{nm}$.

1. Calcolare la lunghezza d'onda λ_0 della stessa riga nel vuoto, usando per l'indice di rifrazione dell'aria il valore $n_{\mathrm{a}} = 1.00027$.

Secondo il modello di Bohr, elaborato nel 1913, i livelli energetici permessi per l'atomo di idrogeno sono dati dalla relazione

$$E_n = -\frac{1}{8n^2}\,K(\varepsilon_0, e, m_e, h) \quad \text{con } n \in \mathbb{N}^+$$

dove $K(\varepsilon_0, e, m_e, h)$ è un'espressione, scritta in termini delle grandezze fisiche indicate (ε_0 costante dielettrica del vuoto, e carica dell'elettrone, m_e massa dell'elettrone e h costante di Planck), con fattore numerico pari a 1.

2. Utilizzando l'analisi dimensionale, determinare l'espressione di K in funzione delle grandezze fisiche indicate.

Il modello di Bohr prevede per K il valore $1.7439 \times 10^{-17}\,\mathrm{J}$.

3. Sapendo che la riga Hα viene emessa nella transizione dal livello $n_{\mathrm{i}} = 3$ al livello $n_{\mathrm{f}} = 2$, calcolare il valore previsto dal modello di Bohr per la lunghezza d'onda di questa riga nel vuoto (λ_{th}) e la differenza percentuale tra questo valore e quello, λ_0, trovato al punto 1.

L'espressione dei livelli energetici data sopra si ricava studiando il moto dell'elettrone nel riferimento del nucleo; considerato che questo è un riferimento solo approssimativamente inerziale, un accordo migliore con i dati sperimentali si ottiene scegliendo il riferimento del centro di massa del sistema nucleo–elettrone e arrivando alla stessa espressione di K nella quale però la massa dell'elettrone è sostituita dalla cosiddetta "massa ridotta" $\mu = m_e\, m_{\mathrm{N}}/(m_e + m_{\mathrm{N}})$, dove m_{N} è la massa del nucleo.

4. Verificare questa affermazione ricalcolando, con questo accorgimento, il valore previsto dalla formula di Bohr per la lunghezza d'onda della riga Hα nel vuoto (λ_{H}) e determinando anche in questo caso la differenza percentuale rispetto al valore λ_0.

La correzione apportata al punto precedente suggerisce che, se l'idrogeno non è completamente puro ma contiene una certa parte di deuterio (il cui nucleo, avente massa $m_{\mathrm{D}} = 3.3436 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, è formato da una coppia protone-neutrone), tutte le righe spettrali dovrebbero sdoppiarsi. In natura vi è effettivamente circa lo 0.015 % di deuterio; la miscela che si forma è detta *idrogeno naturale* [1].

Nella parte che segue usare sempre le lunghezze d'onda riferite al vuoto.

5. Calcolare la separazione $\Delta\lambda$ tra le righe rosse emesse dai due isotopi nell'idrogeno naturale.

Per separare righe spettrali di diversa lunghezza d'onda si può utilizzare un *reticolo di diffrazione*, un componente ottico composto da un numero molto grande di fenditure parallele ed equidistanti, molto vicine tra loro. La legge che fornisce la posizione angolare del k-simo massimo luminoso è

$$p \operatorname{sen} \theta_k = k\,\lambda$$

dove p è il passo del reticolo, cioè la distanza tra due fenditure, θ_k è l'angolo di deviazione del k-simo fascio rispetto alla direzione del fascio incidente, k è un numero intero che rappresenta l'ordine del massimo luminoso e λ la lunghezza d'onda.

Due parametri che caratterizzano un reticolo di diffrazione sono la dispersione D e il potere risolutivo R.

La *dispersione* è definita da

$$D \equiv \Delta\theta/\Delta\lambda$$

(1) Esiste in natura un terzo isotopo dell'idrogeno, il trizio, il cui nucleo è composto da un protone e due neutroni; esso è presente in quantità che può essere trascurata.

dove $\Delta\theta$ è l'angolo tra i centri di due massimi di diffrazione (dello stesso ordine) prodotti da due righe aventi differenza di lunghezza d'onda $\Delta\lambda$.

Si deve tener presente che ogni singolo massimo, in funzione dell'angolo θ, ha un profilo di intensità simile a quelli mostrati diversamente tratteggiati nella figura seguente, caratterizzato ciascuno da una larghezza angolare $\delta\theta$ data da

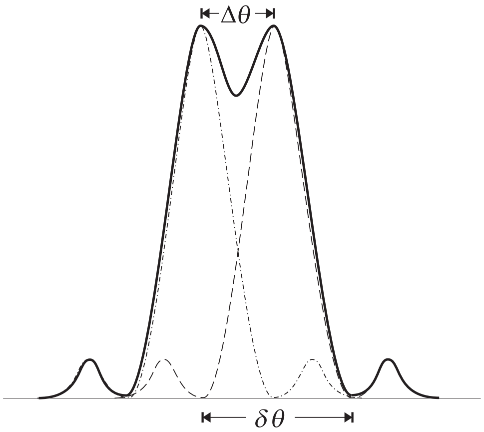
$\delta\theta = \dfrac{2\lambda}{Np\cos\theta}$ dove N è il numero di fenditure del reticolo illuminate dal fascio incidente.

Il *potere risolutivo* esprime la capacità del reticolo di separare due righe spettrali di lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 molto vicine tra loro, tenendo conto della larghezza dei massimi corrispondenti, ed è definito come

$$R \equiv \lambda/\Delta\lambda_{\text{min}}$$

dove $\lambda \approx \lambda_1 \approx \lambda_2$, e $\Delta\lambda_{\text{min}}$ è la minima differenza di lunghezza d'onda necessaria per vedere separate le due righe.

Affinché due righe vicine possano essere risolte (ovvero si possa capire che si tratta di due righe e non di una riga unica), occorre che la loro separazione angolare $\Delta\theta$ dei corrispondenti massimi sia abbastanza grande rispetto alla loro larghezza $\delta\theta$.



Questa minima separazione angolare è data generalmente dal *criterio di Rayleigh*, secondo cui due righe si considerano risolte quando il massimo di una coincide con il primo minimo dell'altra, come mostrato in figura(2).

6. Determinare la dispersione D di un reticolo di diffrazione, in termini del passo p e dell'ordine k.

7. Applicando il criterio di Rayleigh, determinare il potere risolutivo R di un reticolo di diffrazione di larghezza $L = 1\,\text{cm}$, con una densità numerica di $n = 1200$ fenditure mm^{-1}, su cui incide perpendicolarmente un fascio di luce che ne illumina un tratto di larghezza $d = 1.25\,\text{mm}$.

8. Mostrare che nelle condizioni date non è possibile separare la riga rossa dell'idrogeno dalla riga rossa del deuterio.

9. Dire cosa è necessario cambiare nelle condizioni date affinché le due righe si possano vedere separate con questo reticolo.

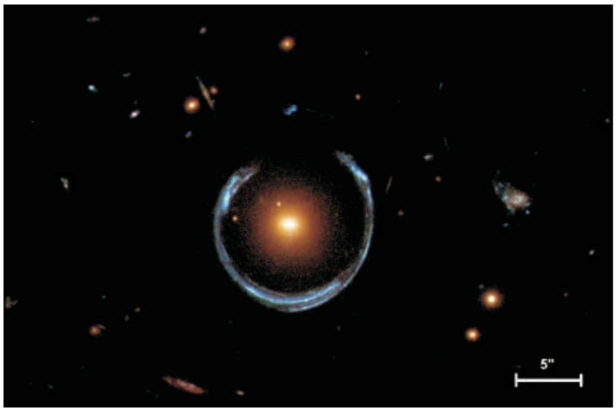
---

(2) In figura i due massimi sono rappresentati con la stessa altezza, come se le due righe avessero la stessa intensità luminosa. Chiaramente questo non corrisponde al caso in esame dell'idrogeno naturale, ma si potrebbe ottenere arricchendo la miscela con più deuterio; per semplicità si studierà questa situazione.

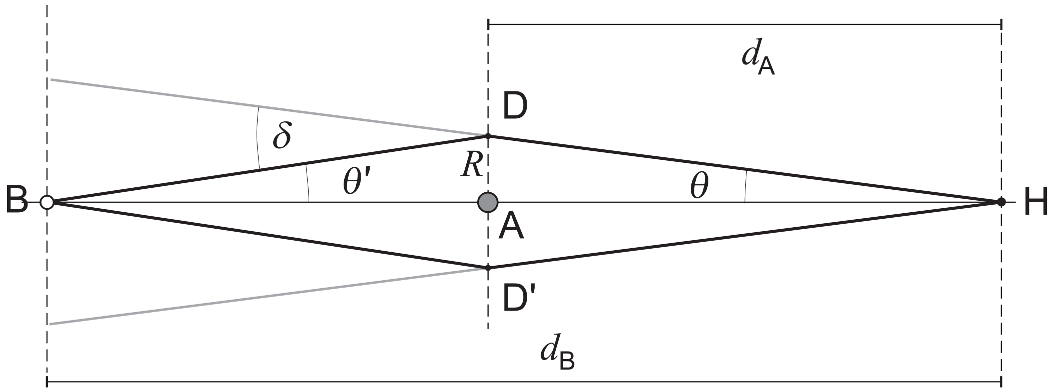
P3 Lente gravitazionale Punti 100

La cosiddetta *lente gravitazionale* è un fenomeno astronomico previsto dalla teoria della relatività generale, dovuto alla deflessione della luce proveniente da una sorgente lontana nell'attraversamento di un campo gravitazionale molto intenso.

Uno dei casi più spettacolari, scoperto nel 2007, è noto come *"Horse Shoe Einstein Ring"* ed è mostrato nell'immagine qui a fianco, ripresa dal telescopio spaziale Hubble. Il disco luminoso al centro dell'anello è dovuto alla luce proveniente da una galassia molto luminosa, in questo caso la (LRG 3-757), che chiameremo "A". La luce che proviene dall'anello è stata emessa invece da un'altra galassia, che chiameremo "B", anch'essa molto luminosa, ma non visibile direttamente perché coperta dalla prima; essa giunge al telescopio Hubble grazie alla deflessione gravitazionale prodotta dalla galassia A. La forma pressoché circolare dell'anello indica che, in questo caso, l'allineamento prospettico delle due galassie è quasi perfetto.



Lo studio di questo sistema è complicato dal fatto che i due oggetti si trovano a distanze tali [3] da non poter trascurare l'espansione e la curvatura dell'universo. In questo problema, tuttavia, tralasceremo questi aspetti e ci limiteremo a considerare ciò che avverrebbe in una regione più piccola e a noi più vicina, dove invece li possiamo trascurare. In tale contesto possiamo descrivere il fenomeno in forma semplificata col seguente diagramma nel quale, per chiarezza, gli angoli sono enormemente amplificati e il percorso curvilineo della luce è approssimato con due tratti rettilinei, come se la deviazione avvenisse in un solo punto.



In figura H è la posizione dell'osservatore, θ l'angolo sotto cui si osserva l'anello di luce e δ l'angolo di deflessione dovuta al campo gravitazionale di A; questo, espresso in termini della massa M della galassia A e della distanza $R = \overline{AD}$, si scrive

$$\delta = \frac{4GM}{c^2 R} \qquad (1)$$

(G è la costante di gravitazione universale, c la velocità della luce)

1. Esprimere la distanza R in funzione della massa M e delle distanze d_A e d_B delle due galassie, indicate in figura (*Ricordare la relazione tra gli angoli δ, θ e θ' e tenere presente che le misure di questi angoli sono sempre dell'ordine dei secondi d'arco*).

2. Esprimere l'angolo di deflessione δ in funzione delle stesse grandezze.

3. Mostrare che la massa M della galassia-lente A può essere ricavata se sono note le distanze d_A e d_B e la misura angolare (θ) del raggio dell'anello di Einstein.

(3) Le distanze sono comprese tra 1 e 4 Gpc (dove l'unità di lunghezza "parsec" (pc) usata in astronomia vale circa 3.1×10^{16} m)

4. Fissata la distanza d_A e posto $d_B = k\, d_A$, determinare per quale valore di k la misura angolare dell'anello visto da H è massima e trovare la corrispondente espressione di $\theta_{\max}$.

Si supponga che la galassia A sia a forma di disco schiacciato e che sia su un piano perpendicolare alla linea di vista. Perché l'anello possa essere osservato occorre che la misura angolare del suo raggio sia abbastanza maggiore dell'apertura angolare sotto cui si osserva il raggio R_A della galassia A, ovvero che sia almeno $\theta > 2\, R_A/d_A$. Questo determina una relazione tra la distanza della galassia e la sua "compattezza", espressa in termini di densità superficiale $\sigma = M/(\pi\, R_A^2)$.

5. Tenuto conto che la massima densità osservata per una galassia compatta è dell'ordine di $\sigma_0 = 200\,\mathrm{kg\,m^{-2}}$, trovare la minima distanza d_A a cui una galassia compatta può generare un anello di Einstein che sia almeno il doppio delle dimensioni apparenti della galassia. Esprimere il risultato in megaparsec (Mpc)

Volendo esaminare in che senso si può parlare di *lente gravitazionale* si può confrontare l'andamento della deflessione δ in funzione di R, data dall'equazione (1), con l'analoga relazione per la deviazione prodotta da una sottile lente ottica convergente di focale f, in funzione della distanza R tra l'asse ottico e il punto di intersezione del raggio con la lente.

6. Determinare la funzione $\delta(R)$ per una lente ottica quando sorgente e immagine sono a distanze p e q dalla lente e gli angoli sono piccoli (ovvero per $p, q \gg R$).

Posto adesso $q = d_A$ e $p = d_B - d_A$, si consideri il cono formato dai raggi di luce che incidono sulla *lente gravitazionale* ad una distanza R dall'asse ottico.

7. Si dimostri che, limitatamente all'insieme dei raggi di questo cono, la *lente gravitazionale* equivale ad una lente ottica con una distanza focale F dipendente dal parametro R (oltre che dalle altre costanti) e si trovi l'espressione di $F(R)$. Si mostri con uno schizzo il differente comportamento di una *lente gravitazionale* rispetto ad una lente ottica, tracciando – in entrambi i casi – tre raggi relativi a tre coni con $R = r, 2r, 3r$.

8. Nel caso particolare in cui la galassia B possa essere considerata a distanza infinita, mostrare che per l'osservatore H, la luce di quella galassia appare provenire da una sorgente a forma di anello, posto a distanza D da H: determinare tale distanza in termini di d_A.

Alcune Costanti Fisiche

Valori arrotondati, con errore relativo minore di 10^{-5}, da considerare **esatti**

COSTANTE	SIMBOLO	VALORE	UNITÀ
Velocità della luce nel vuoto	c	2.9979×10^{8}	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
Carica elementare	e	1.60218×10^{-19}	C
Massa dell'elettrone	m_{e}	9.1094×10^{-31}	kg
		$= 5.1100 \times 10^{2}$	$\mathrm{keV}\ c^{-2}$
Massa del protone	m_{p}	1.67262×10^{-27}	kg
		$= 9.3827 \times 10^{2}$	$\mathrm{MeV}\ c^{-2}$
Massa del neutrone	m_{n}	1.67493×10^{-27}	kg
		$= 9.3955 \times 10^{2}$	$\mathrm{MeV}\ c^{-2}$
Costante dielettrica del vuoto	ε_0	8.8542×10^{-12}	$\mathrm{F\,m^{-1}}$
Permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	1.25664×10^{-6}	$\mathrm{H\,m^{-1}}$
Costante di Planck	h	6.6261×10^{-34}	$\mathrm{J\,s}$
Costante universale dei gas	R	8.3145	$\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
Costante di Avogadro	N	6.0221×10^{23}	$\mathrm{mol^{-1}}$
Costante di Boltzmann	k	1.38065×10^{-23}	$\mathrm{J\,K^{-1}}$
Costante di Faraday	F	9.6485×10^{4}	$\mathrm{C\,mol^{-1}}$
Costante di Stefan–Boltzmann	σ	5.6704×10^{-8}	$\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Costante gravitazionale	G	6.674×10^{-11}	$\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Pressione atmosferica standard	p_0	1.01325×10^{5}	Pa
Temperatura standard (0°C)	T_0	273.15	K
Volume molare di un gas perfetto in condizioni standard (p_0, T_0)	V_{m}	2.2414×10^{-2}	$\mathrm{m^3\,mol^{-1}}$
Unità di massa atomica	u	1.66054×10^{-27}	kg

Altri dati che possono essere necessari

Valori arrotondati, con errore relativo minore di 10^{-5}, da considerare **esatti**.
Per semplicità – salvo che non sia detto esplicitamente – questi dati, quando riferiti ad una specifica temperatura, si potranno utilizzare anche ad altre temperature senza errori importanti.

Accelerazione media di gravità	g	9.8067	$\mathrm{m\,s^{-2}}$
Densità dell'acqua (a 4°C)	ρ_{a}	1.000×10^{3}	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$
Calore specifico dell'acqua (a 20°C)	c_{a}	4.182×10^{3}	$\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$
Calore di fusione dell'acqua	λ_{f}	3.335×10^{5}	$\mathrm{J\,kg^{-1}}$
Calore di vaporizzazione dell'acqua (a 100°C)	λ_{v}	2.257×10^{6}	$\mathrm{J\,kg^{-1}}$