Associazione per l'Insegnamento della Fisica — AIF — 31ª Edizione

# Olimpiadi di Fisica 2017

Progetto Olimpiadi

Gara Nazionale
Prova Teorica
Senigallia, 21 Aprile 2017

# Soluzioni

## PROBLEMA n. 1 – Cilindro che slitta e rotola

**Quesito n. 1.**

Il moto del cilindro è rototraslatorio; in assenza di attrito non ci sono forze orizzontali che possano modificare né la rotazione né la traslazione; di conseguenza sia $v$ sia $\omega$ restano costanti e uguali ai loro valori iniziali.

Il tempo impiegato a compiere un giro è dato da $T = 2\pi/|\omega_0|$. Dopo questo tempo il punto A si trova di nuovo nel punto più alto del cilindro, e quindi il suo spostamento è una traslazione uguale a quella del CdM: la distanza tra la posizione finale e quella iniziale è $d = v_0 T = 2\pi v_0/|\omega_0|$.

**Quesito n. 2.**

Il moto del punto P del cilindro che istantaneamente è in contatto con il piano è dato dalla composizione del moto traslatorio del cilindro (moto del CdM a velocità $v$) con il moto rotatorio attorno all'asse del cilindro (con velocità tangenziale $R\omega$, rivolta indietro per $\omega > 0$); la velocità di P è dunque

$$V_{\mathrm{P}} = v - R\omega\,.$$

Essendo, almeno inizialmente, $V_{\mathrm{P}} > 0$ c'è slittamento tra la superficie del cilindro e quella del piano che dà luogo adesso ad una forza d'attrito dinamico, opposta al moto.

Tale forza d'attrito ha modulo $\mu N = \mu m g$, essendo $\vec{N}$ la reazione normale del piano; come detto, essa è diretta in verso opposto a $V_{\mathrm{P}}(t)$, cioè rivolta verso sinistra in figura e contribuisce a cambiare sia la velocità di traslazione sia la velocità angolare.

La forza d'attrito dinamico si annulla nel momento in cui $V_{\mathrm{P}}(t) = 0$.

**Quesito n. 3.**

Per quanto sopra, finché $V_{\mathrm{P}}(t) > 0$ la forza d'attrito dinamico si scrive $F_{\mathrm{a}} = -\mu m g$.

L'accelerazione del CdM è quindi $a = -\mu g$ e la velocità di traslazione varia secondo la legge:

$$v(t) = v_0 + at = v_0 - \mu g t\,. \tag{1}$$

La forza di attrito esercita anche un momento $M = -F_{\mathrm{a}} R$ rispetto all'asse del cilindro e dunque fa variare anche la velocità angolare.

L'accelerazione angolare, detto $I = mR^2$ il momento d'inerzia del cilindro, vale

$$\alpha = \frac{-F_{\mathrm{a}} R}{I} = \frac{\mu m g R}{mR^2} = \frac{\mu g}{R}\,.$$

Di conseguenza

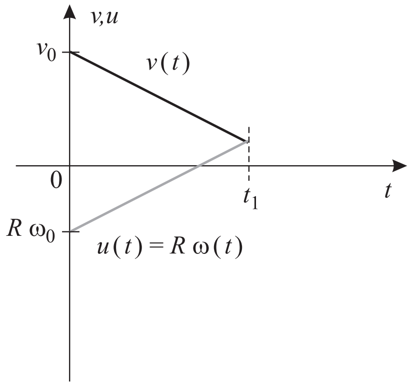
$$u(t) = R\omega(t) = R(\omega_0 + \alpha t) = R\omega_0 + \mu g t\,. \tag{2}$$

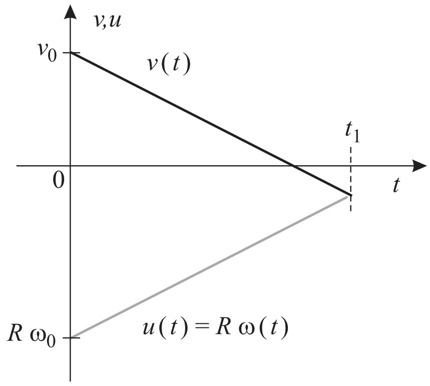
Per le condizioni date, inizialmente è $v(t) > u(t) = R\omega(t)$ ma la forza d'attrito fa decrescere linearmente nel tempo la velocità $v(t)$ mentre fa crescere $u(t)$, sempre linearmente nel tempo. Di conseguenza ci sarà un'istante $t_1$ in cui $v(t_1) = u(t_1)$ e di conseguenza $V_{\mathrm{P}}(t_1) = 0$. Uguagliando la (1) con la (2) si ha

$$v_0 - \mu g t_1 = R\omega_0 + \mu g t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0 - R\omega_0}{2\mu\, g} > 0\,. \tag{3}$$

Ne segue $\quad v(t_1) = \dfrac{v_0 + \omega_0 R}{2} \quad$ e $\quad u(t_1) = v(t_1) \quad$ da cui $\quad \omega(t_1) = \dfrac{v(t_1)}{R} = \dfrac{v_0 + \omega_0 R}{2R}\,. \qquad (4)$

Nei grafici seguenti sono riportate due possibili situazioni al variare di $v_0$ e $\omega_0$. Notare che i coefficienti angolari di $v(t)$ e $u(t)$ sono in ogni caso opposti.

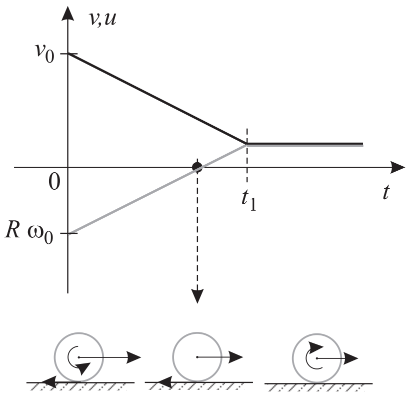


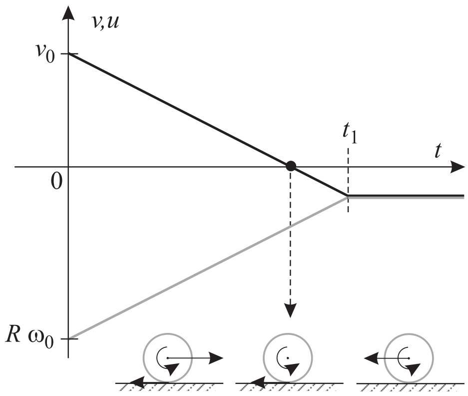




**Quesito n. 4.**

Come detto, all'istante $t_1$, quando $V_\mathrm{P} = 0$ ovvero $v = R\omega$, lo slittamento cessa e il cilindro entra in regime di cosiddetto "puro rotolamento". Da questo istante in poi cessa l'attrito dinamico, ma non c'è neppure attrito statico, come si capisce dal fatto che la condizione di puro rotolamento si conserverebbe anche su una superficie del tutto priva di attrito; dunque non essendoci più alcuna forza in direzione orizzontale applicata al cilindro, sia $v$ che $\omega$ restano costanti e la condizione di puro rotolamento si mantiene indefinitamente.

Il grafico si completa come mostrato di seguito, per i due casi visti al punto precedente.




Nelle due figure, in basso è rappresentato il cilindro nelle varie fasi del moto, con l'indicazione dei versi della velocità del CdM, della velocità angolare e, sul piano, della forza d'attrito quando non è nulla.

**Quesito n. 5.**

Tra i due casi descritti al punto precedente, il caso intermedio è quello per cui all'istante $t_1$ sia $v$ che $\omega$ si annullano simultaneamente. Non essendoci applicate altre forze orizzontali, il cilindro si arresta definitivamente.

Fissato il valore $v_0$, perché questo accada, si deve imporre che nell'istante $t_1$ in cui cessa lo strisciamento $v$ sia nulla. Dalla (4) si ha

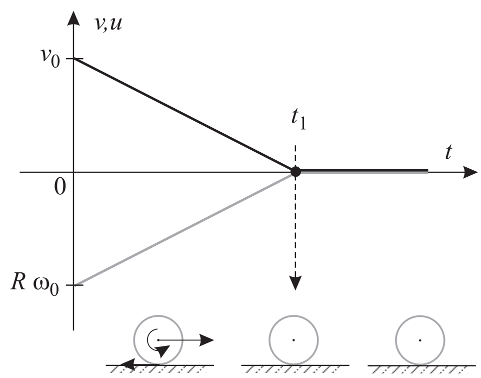
$$v(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \overline{\omega_0} = -\frac{v_0}{R} \tag{5}$$

(ovviamente, si arriva allo stesso risultato anche imponendo la condizione $\omega(t_1) = 0$); $t_0$ è dunque un particolare valore di $t_1$: sostituendo $\overline{\omega_0}$ nella (3) si ha

$$t_0 = \frac{v_0 - R\overline{\omega_0}}{2\mu\, g} = \frac{v_0}{\mu\, g}\,.$$

Fino all'istante $t_0$ il moto del CdM è un moto uniformemente accelerato, per cui $x(t) = x_0 + v_0 t + {}^1\!/_2\, at^2 = v_0 t - {}^1\!/_2\, \mu g t^2$ che, calcolato al tempo $t_0$ dà una distanza

$$d = x(t_0) = v_0 \frac{v_0}{\mu\, g} - \frac{1}{2}\mu g \left(\frac{v_0}{\mu\, g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2\mu\, g}\,.$$



**Quesito n. 6.**

I due casi possibili, già descritti nella risposta al punto 4., corrispondono rispettivamente alle condizioni $\omega_0 > \overline{\omega_0}$ oppure $\omega_0 < \overline{\omega_0}$ (vedere ancora la figura del punto 4.).

Per $\omega_0 > \overline{\omega_0}$ nell'istante $t_1$ in cui inizia il puro rotolamento $v$ e $\omega$ sono entrambe positive, dunque il cilindro si muove in avanti perché la velocità angolare ha cambiato verso mentre $v$ è ancora positiva.

Al contrario, per $\omega_0 < \overline{\omega_0}$ il cilindro si muove in senso opposto a quello iniziale perché adesso è la velocità di traslazione del CdM che ha cambiato segno, mentre la velocità angolare si mantiene in verso antiorario.

**Quesito n. 7.**

Per $\omega_0 = 2\overline{\omega_0} = -2v_0/R$ l'energia cinetica iniziale è

$$K_\mathrm{i} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mR^2\frac{4v_0^2}{R^2} = \frac{5}{2}mv_0^2\,.$$

Dalla (3), sempre per $\omega_0 = -2v_0/R$ si ha $t_1 = 3v_0/(2\mu g)$.

Come già detto più volte, da quando inizia il moto di puro rotolamento $v$ e $\omega$ non cambiano, quindi $v(2t_1) = v(t_1)$ e $\omega(2t_1) = \omega(t_1)$. L'energia cinetica finale è quindi

$$K_\mathrm{f} = \frac{1}{2}mv^2(t_1) + \frac{1}{2}I\omega^2(t_1) = \frac{1}{2}m\frac{v_0^2}{4} + \frac{1}{2}mR^2\frac{v_0^2}{4R^2} = \frac{1}{4}mv_0^2\,.$$

Dunque il lavoro compiuto dalla forza d'attrito è

$$\mathcal{L}_\mathrm{a} = K_\mathrm{f} - K_\mathrm{i} = -\frac{9}{4}mv_0^2\,.$$

Si noti che se si calcolasse il lavoro della forza d'attrito (costante e parallela allo spostamento) come prodotto della forza per lo spazio percorso dal centro di massa del cilindro, fino al momento in cui inizia a rotolare senza strisciare ($t_1$), si otterrebbe un risultato diverso, e sbagliato, perché non si terrebbe conto del fatto che il punto P del cilindro a contatto con il piano si sta muovendo a velocità $V_\mathrm{P}(t)$ che è diversa da quella del CdM $v(t)$. Il modo corretto di fare il calcolo è il seguente.

Nel caso particolare, essendo $\omega_0 = -2\overline{\omega_0} = -2v_0/R$, risulta $u(t) = -2v_0 + \mu g t$ per cui $V_\mathrm{P}(t) = 3v_0 - 2\mu g t$; inoltre, con la stessa sostituzione, si ha $t_1 = 3v_0/(2\mu\, g)$.

Poiché il problema nasce dalla scelta corretta della velocità del punto di contatto al quale è applicata la forza d'attrito, il lavoro di questa si calcola più facilmente integrando nel tempo la potenza istantanea, come segue:

$$\mathcal{L}_\mathrm{a} = \int_0^{t_1} \vec{F}\cdot\vec{V}(t)\,dt = -\int_0^{t_1} \mu m g\,(3v_0 - 2\mu g t)\,dt = -\mu g m\,\left(3v_0 t - \mu g t^2\right)\Big|_0^{t_1} = -\frac{9}{4}mv_0^2 \quad \text{(c.v.d.)}.$$

---

## PROBLEMA n. 2 – Spettro dell'idrogeno naturale

**Quesito n. 1.**

La velocità $v$ di propagazione della luce in un mezzo è legata alla velocità della luce nel vuoto dalla relazione $v = c/n$ dove $n$ è l'indice di rifrazione del mezzo.

Poiché nel passaggio da un mezzo all'altro la frequenza della luce non varia, ricordando che $\lambda\nu = v$, la lunghezza d'onda nel vuoto e la lunghezza d'onda in aria sono legate dalla relazione

$$\lambda_0 = n_\mathrm{a}\lambda_\mathrm{a} = 656.46\,\mathrm{nm}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{656.43 \le \lambda_0 \le 656.48 \quad [\,\mathrm{nm}\,]}$

**Quesito n. 2.**

La costante $K$ ha le dimensioni di un'energia, ovvero con il consueto significato dei simboli $[K] = m\,\ell^2\,t^{-2}$. Le dimensioni delle costanti fisiche coinvolte sono rispettivamente

$$[\varepsilon_0] = q^2\ell^{-3}m^{-1}t^2$$

$$[e] = q$$

$$[m_e] = m$$

$$[h] = m\,\ell^2 t^{-1}\,.$$

Quindi deve essere

$$m\,\ell^2 t^{-2} = \left(q^2\ell^{-3}m^{-1}t^2\right)^{\alpha}\, q^{\beta}\; m^{\gamma}\; \left(m\ell^2 t^{-1}\right)^{\delta} = q^{2\alpha}\ell^{-3\alpha}m^{-\alpha}t^{2\alpha}\; q^{\beta}\; m^{\gamma}\; m^{\delta}\ell^{2\delta}t^{-\delta} \quad \text{ovvero}$$

$$m\,\ell^2 t^{-2} = q^{2\alpha+\beta}\; m^{-\alpha+\gamma+\delta}\; \ell^{-3\alpha+2\delta}\; t^{2\alpha-\delta}$$

e passando agli esponenti si ottiene un sistema di quattro equazioni in quattro incognite; questo si può risolvere rapidamente se si osserva che la terza e la quarta equazione formano un sottosistema in due incognite separato dal resto.

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta = 0 \\ -\alpha+\gamma+\delta = 1 \\ -3\alpha+2\delta = 2 \\ 2\alpha-\delta = -2 \end{cases} \quad \text{la cui soluzione è} \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 4 \\ \delta = -2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

da cui infine, dato che nel testo si dice che il fattore numerico di $K$ è uguale a 1,

$$K = \frac{m_e\,e^4}{\varepsilon_0^2\,h^2}\,.$$

**Quesito n. 3.**

L'energia $E$ di un fotone è legata alla sua lunghezza d'onda $\lambda$ dalla relazione

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}\,.$$

L'energia emessa dall'atomo nella transizione $n_\mathrm{i} = 3 \to n_\mathrm{f} = 2$ vale

$$E = E_\mathrm{i} - E_\mathrm{f} = \frac{K}{8}\left(\frac{1}{n_\mathrm{f}^2} - \frac{1}{n_\mathrm{i}^2}\right)\,.$$

Eguagliando le energie si ricava il valore teorico della lunghezza nel vuoto

$$\lambda_\mathrm{th} = \frac{8hc}{K}\left(\frac{1}{n_\mathrm{f}^2} - \frac{1}{n_\mathrm{i}^2}\right)^{-1} = 656.11\,\mathrm{nm}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{656.10 \le \lambda_\mathrm{th} \le 656.12 \quad [\,\mathrm{nm}\,]}$

La differenza percentuale $\eta$ è

$$|\eta| = \frac{|\lambda_\mathrm{th} - \lambda_0|}{\lambda_0} = 0.053\,\%\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{0.047 \le |\eta| \le 0.059 \quad [\,\%\,]}$

**Quesito n. 4.**

Nel caso di un atomo di idrogeno la massa del nucleo è la massa $m_\mathrm{p}$ del protone che lo compone e la massa ridotta vale $\mu = 9.1044 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

Dall'analisi dimensionale condotta nel quesito 2 si osserva che la costante $K$ è direttamente proporzionale alla massa, dunque il nuovo valore della costante è

$$K' = K\frac{\mu}{m_e} \quad \text{e il valore teorico della lunghezza d'onda diventa}$$

$$\lambda_\mathrm{H} = \lambda_\mathrm{th}\frac{m_e}{\mu} = 656.47\,\mathrm{nm}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{656.45 \le \lambda_\mathrm{H} \le 656.48 \quad [\,\mathrm{nm}\,]}$

Adesso la differenza percentuale $\eta'$ è

$$|\eta'| = 0.0014\,\%$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{0 \le |\eta'| \le 0.007 \quad [\,\%\,]}$

che è circa 40 volte più piccola di prima.

Soluzione alternativa

Nel caso in cui non fosse stato possibile rispondere al quesito 2, e dunque non fosse nota l'espressione di $K$ in funzione delle costanti fisiche, si può giungere alla stessa conclusione anche per altre vie, p.e. considerando un modello classico e semplificato dell'atomo, in cui l'elettrone ruota su un'orbita circolare attorno al nucleo.

La costante $K$, avendo le dimensioni di un'energia, come risulta dal suo valore fornito nel testo, deve essere legata alle energie in gioco, quindi all'energia potenziale $U$ e all'energia cinetica $E_\mathrm{c}$ dell'elettrone.

L'energia cinetica $E_\mathrm{c} = {}^1\!/_2\, m_e v^2$ è direttamente proporzionale alla massa. Se l'orbita è circolare, l'energia potenziale elettrostatica, $U = -e^2/(4\pi\varepsilon_0\, r)$, è costante e il suo modulo è pari a $2E_\mathrm{c}$, quindi anch'essa è proporzionale alla massa. Di conseguenza anche $K$ è direttamente proporzionale alla massa e si può pertanto concludere, come sopra, che

$$K' = K\frac{\mu}{m_e}\,.$$

**Quesito n. 5.**

La massa ridotta in questo caso è

$$\mu_\mathrm{D} = \frac{m_e\, m_\mathrm{D}}{m_e + m_\mathrm{D}} = 9.1069 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}\,.$$

Di conseguenza la lunghezza d'onda, teorica nel vuoto, della riga rossa del deuterio vale

$$\lambda_\mathrm{D} = \lambda_\mathrm{H}\frac{\mu}{\mu_\mathrm{D}} = \lambda_\mathrm{th}\frac{m_\mathrm{e}}{\mu_\mathrm{D}} = 656.29\,\mathrm{nm}$$

e la separazione tra le righe rosse emesse dai due isotopi risulta

$$\Delta\lambda = \lambda_\mathrm{H} - \lambda_\mathrm{D} = 0.18\,\mathrm{nm}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{0.15 \le \Delta\lambda \le 0.20 \quad [\,\mathrm{nm}\,]}$

**Quesito n. 6.**

Differenziando l'equazione del reticolo data nel testo ($p\,\mathrm{sen}\,\theta_k = k\,\lambda$) si ottiene

$$p\cos\theta_k\Delta\theta_k = k\,\Delta\lambda \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\Delta\theta_k}{\Delta\lambda} = \frac{k}{p\cos\theta_k}\,.$$

**Quesito n. 7.**

Dall'espressione della dispersione si ha

$$\Delta\lambda_\mathrm{min} = \frac{p\,\cos\theta_k}{k}\,\Delta\theta_\mathrm{min}$$

mentre, secondo il criterio di Rayleigh, la separazione angolare di due massimi risolti è maggiore o uguale alla loro semilarghezza, per cui

$$\Delta\theta_\mathrm{min} = \frac{1}{2}\delta\theta_k = \frac{\lambda}{d\,\cos\theta_k}\,.$$

Il potere risolutivo è quindi

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_\mathrm{min}} = \frac{\lambda\,k}{p\,\cos\theta_k}\,\frac{d\,\cos\theta_k}{\lambda} = k\,\frac{d}{p} = k\,d\,n = k\,N \quad \text{(avendo usato la relazione } p = 1/n\text{)}$$

ovvero il numero totale di fenditure illuminate moltiplicato per l'ordine di diffrazione osservato. Per determinare il massimo potere risolutivo occorre quindi trovare quanti ordini di diffrazione si possono osservare. Dalla condizione

$$|\mathrm{sen}\,\theta_k| < 1 \quad \Rightarrow \quad |k|\,\frac{\lambda}{p} < 1 \quad \Rightarrow \quad |k| < \frac{p}{\lambda} = \frac{1}{n\,\lambda} = 1.27$$

si ha che è visibile solo il primo ordine di diffrazione ($k = 1$), per cui risulta

$$R = d\,n = N = 1500\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1494 \le R \le 1506}$

**Quesito n. 8.**

Nelle condizioni date, per poter risolvere le due righe nel rosso dell'idrogeno naturale, occorre che sia soddisfatta la relazione

$$\Delta\lambda \geq \Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{R} = 0.44\,\mathrm{nm}\,.$$

Poiché la differenza di lunghezza d'onda è, come si è visto al punto 5, $\Delta\lambda = 0.18\,\mathrm{nm}$, le due righe non possono essere risolte.

**Quesito n. 9.**

Il minimo potere risolutivo che consentirebbe di risolvere le righe è

$$R_{\min} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 3700$$

che corrisponde – come si è visto – al numero di fenditure che devono essere illuminate (per $k = 1$).

Dunque per risolvere le due righe occorre allargare il tratto illuminato del reticolo portandolo ad un valore

$$d' \geq d_{\min} = \frac{R_{\min}}{N}\,d = \frac{R_{\min}}{n} = 3.1\,\mathrm{mm}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{2.6 \leq d_{\min} \leq 3.5 \quad [\,\mathrm{mm}\,]}$

Il minimo tratto illuminato richiesto è minore della larghezza del reticolo, quindi il fascio riesce ad illuminare tutte le fenditure necessarie.

## PROBLEMA n. 3 – Lente gravitazionale

**Quesito n. 1.**

Posto $d_{\mathsf{BA}} = d_{\mathsf{B}} - d_{\mathsf{A}}$, si hanno (per angoli piccoli) le relazioni

$$R = d_{\mathsf{A}}\,\theta, \quad R = d_{\mathsf{BA}}\,\theta' \quad \text{e} \quad \delta = \theta + \theta' \qquad \text{(teorema dell'angolo esterno di un triangolo).}$$

Dunque

$$\delta = \frac{R}{d_{\mathsf{A}}} + \frac{R}{d_{\mathsf{BA}}} = \frac{4G\,M}{c^2\,R} \quad \Rightarrow \quad R^2 = \frac{4GM}{c^2}\left(\frac{1}{d_{\mathsf{A}}} + \frac{1}{d_{\mathsf{BA}}}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{4G\,M}{c^2}\,\frac{d_{\mathsf{A}}\,(d_{\mathsf{B}} - d_{\mathsf{A}})}{d_{\mathsf{B}}}}\,.$$

**Quesito n. 2.**

Sostituendo il risultato precedente nell'equazione (1) del testo

$$\delta = \frac{4G\,M}{c^2}\sqrt{\frac{c^2}{4G\,M}\,\frac{d_{\mathsf{B}}}{d_{\mathsf{A}}\,d_{\mathsf{BA}}}} = \sqrt{\frac{4G\,M}{c^2}\,\frac{d_{\mathsf{B}}}{d_{\mathsf{A}}\,(d_{\mathsf{B}} - d_{\mathsf{A}})}}\,.$$

**Quesito n. 3.**

Se l'angolo $\theta$ è noto, avendo misurato la dimensione dell'anello sull'immagine, si possono ricavare in sequenza $R$, $\theta'$, $\delta$ e infine $M$:

$$R = d_{\mathsf{A}}\,\theta, \qquad \theta' = \frac{d_{\mathsf{A}}}{d_{\mathsf{BA}}}\,\theta, \qquad \delta = \theta + \theta' = \frac{d_{\mathsf{B}}}{d_{\mathsf{BA}}}\,\theta \quad \text{da cui} \quad M = \frac{c^2\,R\,\delta}{4G} = \frac{c^2\,\theta^2}{4G}\,\frac{d_{\mathsf{A}}d_{\mathsf{B}}}{d_{\mathsf{B}} - d_{\mathsf{A}}}\,.$$

**Quesito n. 4.**

Si può ricavare $\theta$ invertendo l'espressione della massa trovata sopra:

$$\theta = \sqrt{\frac{4MG}{c^2}\frac{d_\mathsf{B} - d_\mathsf{A}}{d_\mathsf{A}\, d_\mathsf{B}}} = \sqrt{\frac{4MG}{c^2\, d_\mathsf{A}}\left(1 - \frac{1}{k}\right)} \quad \Rightarrow \quad \theta_{\max}(d_\mathsf{A}) = \sqrt{\frac{4GM}{c^2\, d_\mathsf{A}}} \quad \text{per} \quad k \to \infty\,.–$$

Dunque l'anello ha dimensioni massime quando la galassia B è a distanza molto maggiore (infinita) rispetto ad A.

In alternativa, partendo dall'espressione di $\delta$ trovata al punto 1 si ha, in termini di $k$,

$$\delta = \sqrt{\frac{4GM}{c^2\, d_\mathsf{A}}\frac{k}{k-1}}$$

e usando le due relazioni $\delta = \theta + \theta'$ e $\theta d_\mathsf{A} = \theta' d_\mathsf{BA}$ ovvero

$$\theta = \theta'(k-1) = (\delta - \theta)(k-1) \quad \Rightarrow \quad (1 + (k-1))\,\theta = \delta k - 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \delta\,\frac{k-1}{k}$$

si arriva ugualmente al risultato.

**Quesito n. 5.**

Si deve imporre che sia $\theta_{\max} > \eta\, R_\mathrm{A}/d_\mathsf{A}$ (con $\eta > 2$); allora

$$\sqrt{\frac{4GM}{c^2\, d_\mathsf{A}}} > \eta\,\frac{R_\mathrm{A}}{d_\mathsf{A}} \quad \Rightarrow \quad \frac{4GM}{c^2\, d_\mathsf{A}} > \eta^2\,\frac{R_\mathrm{A}^2}{d_\mathsf{A}^2}\,.$$

La condizione su $d_\mathsf{A}$ si scrive

$$d_\mathsf{A} > \eta^2\,\frac{c^2}{4G}\frac{R_\mathrm{A}^2}{M} = \eta^2\,\frac{c^2}{4\pi\, G}\frac{\pi\, R_\mathrm{A}^2}{M} = \eta^2\,\frac{c^2}{4\pi\, G}\frac{1}{\sigma}\,.$$

Poiché per tutte le galassia osservate risulta $\sigma \le \sigma_0$ (*) deve essere in ogni caso

$$d_\mathsf{A} > \eta^2\,\frac{c^2}{4\pi\, G\,\sigma_0} \approx \eta^2 \times 17\,\mathrm{Mpc}\,.$$

Per $\eta$ maggiore o dell'ordine di 2, la minima distanza della galassia-lente per produrre un anello osservabile deve essere di circa 70 Mpc.

**Quesito n. 6.**

Definendo in modo analogo gli angoli $\theta$, $\theta'$ e $\delta$ per una lente e usando l'equazione di punti coniugati si ha

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{p} + \frac{R}{q} = \frac{R}{f} \quad \Rightarrow \quad \theta' + \theta = \frac{R}{f} = \delta\,.$$

Dunque nel caso della lente ottica la deflessione è proporzionale ad $R$ mentre per la *lente gravitazionale* è inversamente proporzionale ad $R$.

**Quesito n. 7.**

Nel caso della *lente gravitazionale* si può scrivere

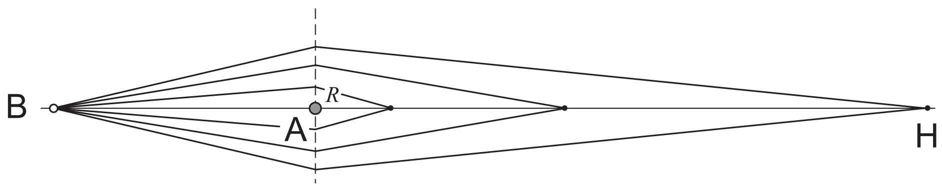
$$\delta = \frac{4GM}{c^2\, R} = \frac{R}{f} \quad \Rightarrow \quad f = F(R) = \frac{c^2}{4GM}\,R^2$$

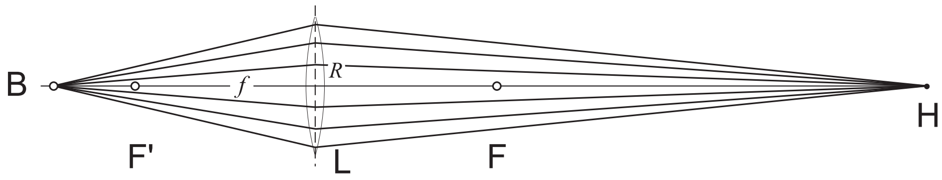
Allo stesso risultato si arriva direttamente dall'equazione di $R$ ricavata al punto 1

$$R = \sqrt{\frac{4G\,M}{c^2}\frac{d_\mathsf{A} d_\mathsf{BA}}{d_\mathsf{B}}} = \sqrt{\frac{4G\,M}{c^2}\frac{p\,q}{p+q}} \quad \Rightarrow \quad \frac{p+q}{p\,q} = \frac{4G\,M}{c^2}\frac{1}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{F(R)}\,.$$

I due diagrammi schematici richiesti sono di questo tipo: sopra il caso gravitazionale, sotto la lente ottica.

(*) Il dato sulla densità superficiale è desunto dal lavoro di P.H. Hopkins et al.: *"A maximun stellar surface density in dense stellar systems"*, Mon.Not. R.Astr.Soc. **401**, L19-23(2010).



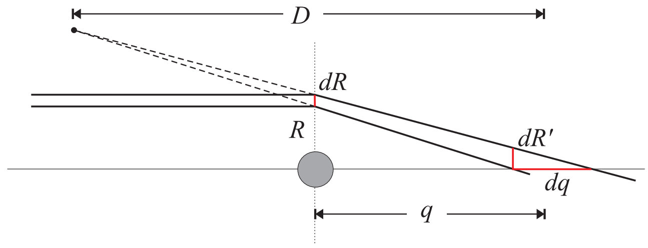




**Quesito n. 8.**

I raggi emergenti dalla *lente gravitazionale*, cioè quelli provenienti dalla galassia B sono divergenti; considerando un sottile intervallo $dR$ intorno al punto D dello schema, i prolungamenti dei raggi si incontrano a distanza $D$ da H, come illustrato qui sotto, dove si localizza la sorgente apparente della luce, distribuita in tutti i punti di un anello. Per $p \to \infty$ resta $q = F(R) = \alpha\, R^2$.

Con riferimento alla figura si può scrivere

$$dR' = dR\,\frac{D}{D-q} = \frac{R}{q}\,dq \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dR} = \frac{D\,q}{R\,(D-q)}\,.$$




Ma $dq/dR$ è la derivata di $q = F(R)$ pari a $2\alpha\,R = 2q/R$ per cui

$$q\,R\;\;D = 2q\,R\,(D-q) \quad \Rightarrow \quad D = 2q = 2\,d_{\mathsf{A}}\,.$$

Dunque la luce della galassia B sembra provenire da un anello posto ad una distanza doppia di quella della galassia-lente.

In alternativa si può ragionare in quest'altro modo.

Due raggi che passano a distanza $dR$ ($dR \ll R$ dato che l'osservatore è puntiforme) subiscono delle deviazioni

$$\delta = \frac{4GM}{c^2\,R} \quad \text{e} \quad \delta - d\delta = \frac{4GM}{c^2(R+dR)} \quad \text{per cui}$$

$$d\delta = \frac{4GM}{c^2\,R^2}\,dR = \frac{\delta}{R}\,dR\,.$$

Prolungando i due raggi essi convergono in un punto per cui $(D-q)\,d\delta = dR$, quindi $D = R/\delta + q$, e siccome in questo caso (raggi paralleli alla direzione di osservazione) $q\,\delta = R$, segue che $D = 2q = 2d_{\mathsf{A}}$.

---

*Materiale elaborato dal Gruppo*

PROGETTO OLIMPIADI
*Segreteria delle Olimpiadi Italiane di Fisica*
e-mail: `segreteria@olifis.it`
WEB: `www.olifis.it`