

Olimpiadi di Fisica 2018

Gara di 2° livello
Martedì 20 Febbraio 2018

Soluzione

Quesiti

QUESITO n. 1

Indicando l'angolo di incidenza con θ_1 , quello di rifrazione con θ_2 e con v_1 e v_2 le velocità di propagazione nei due mezzi, è

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2} \quad \text{da cui} \quad \sin \theta_2 = \frac{v_2}{v_1} \sin \theta_1 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 17.5^\circ. \quad \text{RIS} \quad \Rightarrow \quad 17.4 \leq \theta_2 \leq 17.6 \quad [^\circ]$$

QUESITO n. 2

Sul blocco agiscono tre forze: il peso, la forza normale e la forza d'attrito; le prime due si equilibrano, dunque quest'ultima è la forza risultante. Il carico non si sposta rispetto al camion, quindi la sua accelerazione è la stessa del camion, in modulo $a = 0.35g$. Per la seconda legge della dinamica il modulo dell'attrito è allora:

$$F_a = Ma = 0.35 Mg = 8.58 \times 10^3 \text{ N}. \quad \text{RIS} \quad \Rightarrow \quad 8.56 \times 10^3 \leq F_a \leq 8.60 \times 10^3 \quad [\text{N}]$$

Notare che il risultato è indipendente dal coefficiente d'attrito statico che invece determina il valore massimo che può avere la forza d'attrito:

$$F_{a,\max} = \mu_s N = \mu_s Mg = 1.23 \times 10^4 \text{ N} > F_a$$

il che conferma che il blocco non scivola sul pianale del camion.

QUESITO n. 3

Detti p_0 e V_0 la pressione e il volume iniziale in ciascuna delle due parti, e p_1, V_1, p_2, V_2 le pressioni e i volumi finali, per la legge di Boyle – essendo T costante – si ha $p_1 V_1 = p_2 V_2 = p_0 V_0$.

Indicando con S l'area della sezione del pistone, con d la semialtezza (per cui $Sd = V_0$), e con x lo spostamento del pistone dalla posizione iniziale, risulta $p_1 S(d+x) = p_2 S(d-x) = p_0 Sd$, da cui

$$p_1 = p_0 \frac{d}{d+x} \quad p_2 = p_0 \frac{d}{d-x}.$$

Il modulo F della forza che agisce sul pistone vale

$$F = (p_2 - p_1) S = \frac{2d p_0 x S}{d^2 - x^2} = \frac{2 p_0 x V_0}{d^2 - x^2} = 267 \text{ N}. \quad \text{RIS} \quad \Rightarrow \quad 264 \leq F \leq 270 \quad [\text{N}]$$

QUESITO n. 4

Si indichi con v_m la velocità durante la fase di marcia e con Δt_m il relativo tempo; con v_c e Δt_c i corrispondenti dati relativi alla fase di corsa e infine con $\Delta t = \Delta t_m + \Delta t_c$ il tempo totale della sessione di allenamento. Poiché lo spazio percorso è $v_m \Delta t_m + v_c \Delta t_c$, la velocità media risulta

$$\bar{v} = \frac{v_m(\Delta t - \Delta t_c) + v_c \Delta t_c}{\Delta t} = v_m + (v_c - v_m) \frac{\Delta t_c}{\Delta t}. \quad \text{Di conseguenza} \quad \frac{\Delta t_c}{\Delta t} = \frac{\bar{v} - v_m}{v_c - v_m} = 80\%.$$

RIS \Rightarrow $79\% \leq \Delta t_c / \Delta t \leq 81\%$

QUESITO n. 5

Non appena il sistema si sposta dalla posizione iniziale di un angolo θ nel verso orario indicato in figura, assunto come positivo, il momento meccanico delle forze risulta

$$\mathcal{M} = -m_1 g d_1 \sin \theta + m_2 g d_2 \sin \theta = (m_2 d_2 - m_1 d_1) g \sin \theta = k g \sin \theta.$$

Sostituendo i valori numerici dati si trova

$$k = 0.05 \text{ kg m} > 0 \quad \text{per cui} \quad \mathcal{M} \geq 0 \quad \text{per} \quad \theta \geq 0$$

essendo positivo il verso entrante per il momento totale. Di conseguenza la posizione iniziale è di equilibrio instabile e il sistema tende a portarsi nella posizione in cui m_2 si trova in basso, che è quella di equilibrio stabile.

L'energia meccanica del sistema di masse all'inizio del moto è, considerando nulla l'energia potenziale gravitazionale al livello del perno, $m_2 g d_2 - m_1 g d_1$. L'energia meccanica del sistema, nel punto di equilibrio stabile, ovvero quando la sbarra è verticale con la posizione delle masse scambiata rispetto all'inizio, è

$$\frac{1}{2} (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2) \omega^2 + m_1 g d_1 - m_2 g d_2.$$

Poiché gli attriti sono trascurabili, l'energia meccanica si conserva e si trova

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{m_2 d_2 - m_1 d_1}{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2}} g = 1.67 \text{ rad s}^{-1}. \quad \text{RIS} \Rightarrow \quad \boxed{1.63 \leq \omega \leq 1.71 \quad [\text{rad s}^{-1}]}$$

Soluzione alternativa

L'energia potenziale gravitazionale del sistema di masse, considerando il livello zero all'altezza del perno, è

$$U(\theta) = m_2 g d_2 \cos \theta - m_1 g d_1 \cos \theta = (m_2 d_2 - m_1 d_1) g \cos \theta$$

Poiché, come visto sopra, il termine tra parentesi è positivo con i valori assegnati, l'andamento della funzione $U(\theta)$ è lo stesso di $\cos \theta$: si ha quindi un massimo (e dunque una posizione di equilibrio instabile) in corrispondenza della posizione iniziale e un minimo (equilibrio stabile) in corrispondenza di $\theta = \pi$ rad.

Poiché gli attriti sono trascurabili l'energia meccanica si conserva. Risulta dunque

$$(m_2 d_2 - m_1 d_1) g \cos 0 = (m_2 d_2 - m_1 d_1) g \cos \pi + \frac{1}{2} (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2) \omega^2$$

da cui si ricava lo stesso risultato.

QUESITO n. 6

Detta η la variazione relativa di lunghezza ($\eta = 0.009$ in questo caso), dopo l'allungamento, il filo avrà lunghezza $\ell' = (1 + \eta) \ell$. La densità del filo dipende dal materiale e dalla temperatura, e quindi non viene modificata dallo stiramento. Di conseguenza il volume del filo resta costante per cui $\ell S = \ell' S'$; all'allungamento corrisponderà una diminuzione della sezione. Quest'ultima sarà data da

$$S' = \frac{\ell}{\ell'} S = \frac{\ell}{(1 + \eta) \ell} S = \frac{1}{(1 + \eta)} S.$$

Tenuto conto che anche la resistività non cambia, la resistenza sarà pari a

$$R' = \rho \frac{\ell'}{S'} = \rho \frac{(1 + \eta)^2 \ell}{S} = (1 + \eta)^2 R = 1.812 \Omega. \quad \text{RIS} \Rightarrow \quad \boxed{1.808 \leq R' \leq 1.816 \quad [\Omega]}$$

Soluzione alternativa

Poiché il volume del filo non cambia, a un aumento di lunghezza corrisponde una diminuzione della sezione del filo. Se la variazione è piccola, le variazioni percentuali sono uguali in modulo; infatti

$$V = \ell S = \text{cost} \Rightarrow \delta \ell S + \ell \delta S = 0 \Rightarrow \frac{\delta S}{S} = -\frac{\delta \ell}{\ell}.$$

La resistenza è data $R = \rho \frac{\ell}{S}$ per cui, sempre per piccole variazioni, $\frac{\delta R}{R} = \frac{\delta \ell}{\ell} - \frac{\delta S}{S} = 2 \frac{\delta \ell}{\ell}$. La resistenza varia dunque dell'1.8% e alla fine si ritrova il risultato dato sopra.

NOTA per i correttori \Rightarrow *Un solo punto per chi non considera la variazione di sezione.*

QUESITO n. 7

Detta S la sezione del cilindro e Δh la variazione del livello del contenuto, si può calcolare la diminuzione di volume $\Delta V = S \Delta h$ dovuta alla fusione del ghiaccio; conoscendo la densità ρ_g del ghiaccio e quella ρ_0 dell'acqua a 0°C , si può risalire al volume iniziale del ghiaccio. La massa del ghiaccio e quella dell'acqua sono uguali, quindi

$$M = V_g \rho_g = V_a \rho_0 \Rightarrow V_a = \frac{\rho_g}{\rho_0} V_g$$

$$\Delta V = V_a - V_g = V_g \frac{\rho_g - \rho_0}{\rho_0} \quad (\text{notare che } \Delta V < 0 \text{ così come } \Delta h)$$

$$V_g = \frac{\rho_0}{\rho_g - \rho_0} \Delta V = \frac{\rho_0}{\rho_g - \rho_0} S \Delta h.$$

Per una massa M , detto λ_f il calore latente di fusione del ghiaccio, il calore assorbito sarà

$$Q = M \lambda_f = \frac{\rho_0}{\rho_g - \rho_0} S \Delta h \rho_g \lambda_f = 1.85 \times 10^5 \text{ J}.$$

RIS \Rightarrow $1.84 \times 10^5 \leq Q \leq 1.86 \times 10^5 \text{ [J]}$

QUESITO n. 8

La resistenza equivalente è data da $\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ e quindi la differenza di potenziale ai capi del parallelo, e anche di R_2 , è $V = I R^*$; la corrente che attraversa R_2 è quindi

$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{I R^*}{R_2} = \frac{I}{R_2 (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3)} = \frac{I}{1 + R_2/R_1 + R_2/R_3} = 2.94 \text{ A}.$$

RIS \Rightarrow $2.93 \leq I_2 \leq 2.95 \text{ [A]}$

QUESITO n. 9

L'intensità dell'onda sonora è proporzionale al quadrato della sua ampiezza A .

Nella regione di sovrapposizione delle due onde, si avrà interferenza costruttiva nei punti in cui le due onde arrivano in fase; in questi punti l'onda risultante avrà ampiezza pari alla somma delle ampiezze delle due onde. Pertanto, indicando con α la costante di proporzionalità,

$$W = \alpha A^2 = \alpha (A_1 + A_2)^2 = \alpha \left(\sqrt{\frac{W_1}{\alpha}} + \sqrt{\frac{W_2}{\alpha}} \right)^2 = \left(\sqrt{W_1} + \sqrt{W_2} \right)^2 = 1 \text{ W/m}^2.$$

QUESITO n. 10

Dalla legge dell'effetto fotoelettrico si ha che $e V_1 = \frac{hc}{\lambda_1} - W_0$ e $e V_2 = \frac{hc}{\lambda_2} - W_0$.

Dividendo membro a membro

$$\frac{e V_1}{e V_2} = k = \frac{hc/\lambda_1 - W_0}{hc/\lambda_2 - W_0} \quad \text{da cui} \quad W_0 = \frac{hc}{k-1} \left(\frac{k}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = 2.23 \times 10^{-19} \text{ J} = 1.39 \text{ eV}.$$

RIS \Rightarrow $2.20 \times 10^{-19} \leq W_0 \leq 2.26 \times 10^{-19} \text{ [J]}$

Problemi

PROBLEMA n. 1 – Un granello di polvere su un satellite

Quesito n. 1.

Il satellite è sottoposto alla sola forza di gravità del pianeta, che deve essere quindi uguale alla forza centripeta. Imponendolo si ottiene:

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r \quad \text{da cui} \quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}.$$

Quesito n. 2.

Sul corpo (v. figura) agiscono tre forze: la forza di gravità del pianeta \vec{F}_p , la forza di gravità del satellite \vec{F}_s e la forza normale \vec{N} .

Assumendo come positivo il verso satellite-pianeta, le prime due sono date da

$$F_p = \frac{GM\mu}{(r-a)^2} \quad F_s = -\frac{Gm\mu}{a^2}.$$

mentre la forza risultante F_c (centripeta) che agisce sul corpuscolo deve essere

$$F_c = \mu\omega^2(r-a) = \frac{GM\mu}{r^3}(r-a).$$

La condizione $F_p + F_s + N = F_c$ si esprime quindi come

$$\frac{GM\mu}{(r-a)^2} - \frac{Gm\mu}{a^2} + N = \frac{GM\mu}{r^3}(r-a) \quad \Rightarrow \quad N = \frac{GM\mu}{r^3}(r-a) - \frac{GM\mu}{(r-a)^2} + \frac{Gm\mu}{a^2}.$$

NOTA per i correttori \Rightarrow Si può arrivare agli stessi risultati dei punti 1 e 2 mettendosi in un sistema rotante e studiando l'equilibrio con l'aggiunta della forza centrifuga. In tal caso il procedimento è da considerarsi corretto.

Quesito n. 3.

Il corpo può rimanere appoggiato sul satellite solo se il risultato del calcolo precedente fornisce $N \geq 0$. Imponendolo nell'equazione appena trovata si ricava

$$\frac{M}{r^3}(r-a) - \frac{M}{(r-a)^2} + \frac{m}{a^2} \geq 0.$$

NOTA per i correttori \Rightarrow Il punteggio viene attribuito anche per l'espressione $N \geq 0$.

Quesito n. 4.

Nell'espressione precedente, conviene raccogliere r nei termini tra parentesi:

$$\frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) - \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-2} + \frac{m}{a^2} \geq 0.$$

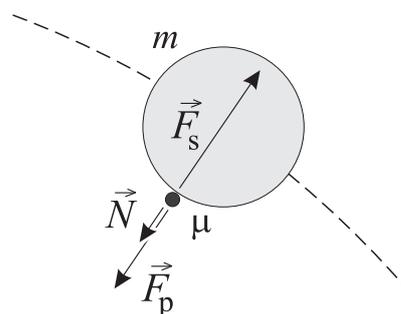
Nell'ipotesi $(a/r) \ll 1$ il binomio nel secondo termine può essere approssimato con $(1 + 2a/r)$, ottenendo

$$-\frac{3Ma}{r^3} + \frac{m}{a^2} \geq 0.$$

Pertanto la condizione affinché il corpo non si stacchi dal satellite è

$$r \geq \left(\frac{3M}{m}\right)^{1/3} a = r_0.$$

NOTA per i correttori \Rightarrow Si può arrivare allo stesso risultato imponendo che la forza normale sia uguale a zero e risolvendo un'equazione. In tal caso la soluzione è da considerare corretta.



Quesito n. 5.

Si può osservare che, detta ρ la densità del satellite, l'espressione di r_0 può essere espressa come

$$r_0 = \left(\frac{9M}{4\pi\rho} \right)^{1/3}$$

che mostra come il raggio richiesto dipenda solamente dalla densità del satellite e non dalle sue dimensioni.

Sostituendo nella formula appena trovata i dati della massa della Terra e della densità del satellite, si ottiene

$$r_0 = 1.198 \times 10^4 \text{ km.}$$

RIS \Rightarrow

$$1.194 \leq r_0 \leq 1.201 \quad [10^4 \text{ km}]$$

PROBLEMA n. 2 – Onde su corda verticale
Quesito n. 1.

Le dimensioni di velocità, forza, densità e area sono rispettivamente:

$$[v] = \text{L T}^{-1}$$

$$[F] = \text{M L T}^{-2}$$

$$[\rho] = \text{M L}^{-3}$$

$$[A] = \text{L}^2$$

avendo indicato con M, L e T le dimensioni di massa, lunghezza e tempo. Sapendo che v dipende da F , ρ e A si pone $v = F^\alpha \rho^\beta A^\gamma$ con α, β e γ esponenti da determinare. Dunque dev'essere

$$\text{L T}^{-1} = \text{M}^\alpha \text{L}^\alpha \text{T}^{-2\alpha} \text{M}^\beta \text{L}^{-3\beta} \text{L}^{2\gamma} = \text{L}^{\alpha-3\beta+2\gamma} \text{M}^{\alpha+\beta} \text{T}^{-2\alpha}.$$

Uguagliando gli esponenti delle dimensioni corrispondenti si ha

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta + 2\gamma = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha = -1 \end{cases}$$

da cui si ricava immediatamente $\alpha = 1/2$, $\beta = -1/2$ e $\gamma = -1/2$, ovvero

$$v = F^{1/2} \rho^{-1/2} A^{-1/2} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}. \quad (1)$$

Poiché il fattore numerico adimensionale è uguale a 1, la formula della velocità è proprio la (1).

NOTA per i correttori \Rightarrow *Può essere accettata anche una soluzione in cui si fa uso delle unità di misura al posto delle dimensioni delle diverse grandezze fisiche.*

Quesito n. 2.

In un punto posto ad altezza h la tensione sarà uguale a quella alla base (F_0) più il peso della corda sottostante:

$$F(h) = F_0 + \rho A h g. \quad (2)$$

Quesito n. 3.

Dalla (1) e dalla (2) si ricava:

$$v(h) = \sqrt{\frac{F_0}{\rho A} + gh} = \sqrt{v_0^2 + gh}.$$

Quesito n. 4.

Confrontando questa espressione con quella che dà l'accelerazione in funzione della posizione in un moto rettilineo uniformemente accelerato, $v(s) = \sqrt{v_0^2 + 2as}$ si vede che l'accelerazione è costante e pari a $g/2$.

In alternativa, l'accelerazione si può calcolare derivando la velocità rispetto al tempo, interpretando adesso la velocità come una funzione composta $v(h(t))$:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \frac{dh}{dt} = \frac{g}{2v} v = \frac{g}{2}.$$

Poiché l'accelerazione è positiva, dunque nel verso scelto per h , essa è diretta verso l'alto, come doveva essere dato che il modulo della velocità cresce con h .

NOTA: in questo problema si è supposto che le variazioni relative della tensione siano piccole sulla distanza dell'ordine della larghezza dell'impulso.

PROBLEMA n. 3 – Condensatore semicircolare
Quesito n. 1.

La superficie affacciata, in funzione di θ (espresso in radianti) è data da

$$S(\theta) = \frac{\pi - |\theta|}{2} R^2 \quad \text{e quindi la capacità è} \quad C(\theta) = \varepsilon_0 \frac{(\pi - |\theta|) R^2}{2d} = \varepsilon_0 \frac{(\pi - |\theta|) R}{2\eta}.$$

Quesito n. 2.

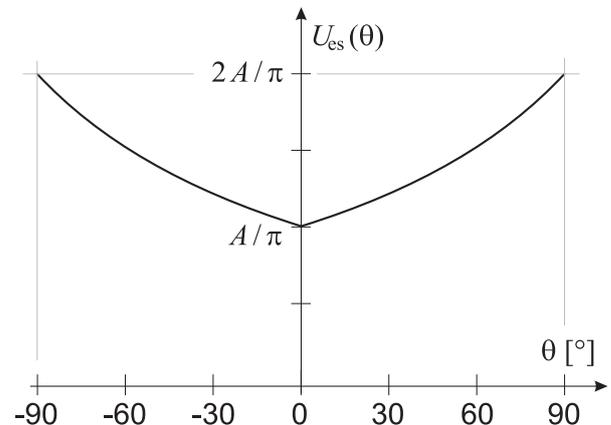
La carica del condensatore dopo che è stato caricato (con $\theta = 0$) è

$$Q_0 = C(0) V_0 = \frac{\varepsilon_0 \pi R}{2\eta} V_0.$$

Con questa carica, l'energia elettrostatica del condensatore ad un angolo θ qualunque, nell'intervallo considerato, è

$$\begin{aligned} U_{\text{es}}(\theta) &= \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C(\theta)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_0 \pi R}{2\eta} V_0 \right)^2 \frac{2\eta}{\varepsilon_0 (\pi - |\theta|) R} = \\ &= \frac{\varepsilon_0 \pi^2 R V_0^2}{4\eta (\pi - |\theta|)} = \frac{A}{\pi - |\theta|} \quad \text{con} \quad A = \frac{\varepsilon_0 \pi^2 R V_0^2}{4\eta}. \end{aligned}$$

L'andamento in funzione di θ nell'intervallo considerato è mostrato nel grafico a fianco.

**Quesito n. 3.**

La condizione di equilibrio stabile di un sistema coincide con uno stato di minimo (assoluto o relativo) di energia potenziale. Se il condensatore è scarico lo stato di minima energia (gravitazionale) è quello con il CdM più in basso possibile, quindi per $\theta = 0$; se il condensatore è carico si deve considerare anche l'energia e.s. del sistema che presenta un minimo nuovamente in $\theta = 0$; di conseguenza, in entrambi i casi, questa è la posizione di equilibrio.

Quesito n. 4.

I momenti dovuti al peso dell'armatura e quello del corpo appeso devono dare momento risultante nullo rispetto all'asse, quindi

$$mgR \cos \theta_0 - mgh \sin \theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{tg } \theta_0 = \frac{R}{h} = \frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = 67.0^\circ.$$

Quesito n. 5.

Con il condensatore carico, in un intorno del valore θ_0 l'energia gravitazionale del sistema è stazionaria mentre quella e.s. del condensatore è una funzione crescente di θ ; ne segue che l'energia potenziale totale è anch'essa crescente con θ e di conseguenza il sistema lasciato da fermo in questa posizione tende a ruotare verso angoli minori.

Quesito n. 6.

Si devono quindi considerare angoli minori di θ_0 , fino a trovare il minimo di energia potenziale totale; questa è data dal termine elettrostatico e da due termini di energia gravitazionale dovuti alla massa dell'armatura (1) e del corpo sospeso (2):

$$U(\theta) = U_{\text{es}}(\theta) + U_1(\theta) + U_2(\theta)$$

dove la prima è stata calcolata al punto 2, mentre le altre sono (a meno di una costante additiva arbitraria)

$$U_1(\theta) = -mgh \cos \theta = -\frac{4mgR}{3\pi} \cos \theta; \quad U_2(\theta) = -mgR \sin \theta.$$

In definitiva si tratta di trovare il minimo della funzione

$$U(\theta) = \frac{A}{\pi - \theta} - B \cos \theta - C \sin \theta, \quad \text{dove } A \text{ è stata definita al punto 2, } B = \frac{4mgR}{3\pi}, \quad C = mgR,$$

in un intorno sinistro di θ_0 . Con i valori numerici dati si ottiene:

$$A = 3.072 \text{ mJ} \quad B = 5.203 \text{ mJ} \quad C = 12.258 \text{ mJ}.$$

È sufficiente valutare la funzione in 5 punti tra θ_0 e $\theta_0 - 4^\circ$; la soluzione numerica dà circa 64° .

$$\text{RIS} \Rightarrow \boxed{63.5 \leq \theta^* \leq 64.5 \quad [^\circ]}$$

θ [°]	θ [rad]	$U(\theta)$ [mJ]
67°	1.1694	-11.759
66°	1.1519	-11.771
65°	1.1345	-11.778
64°	1.1170	$\Rightarrow -11.781 \Leftarrow$
63°	1.0996	-11.780

Utilizzando un passo più piccolo si troverebbe $\theta^* \approx 63.79^\circ$.

NOTA: Lo spostamento della posizione di equilibrio nel condensatore carico con la massa appesa, e dunque la presenza di una forza e.s. di richiamo, è chiaramente incompatibile con la schematizzazione assunta per il campo E (uniforme e ortogonale alle armature nella zona in cui queste sono affacciate e nullo altrove) perché si tratta proprio di un "effetto di bordo". Tuttavia l'approccio seguito ha una sua validità in quanto l'errore introdotto nel calcolo dell'energia e.s. è tanto minore quanto più la regione interessata dagli effetti di bordo è limitata spazialmente.

Materiale elaborato dal Gruppo



PROGETTO OLIMPIADI
Segreteria delle Olimpiadi Italiane di Fisica
e-mail: segreteria@olifis.it
WEB: www.olifis.it



NOTA BENE: È possibile utilizzare, riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico questo materiale alle due seguenti condizioni: citare la fonte; non usare il materiale, nemmeno parzialmente, per fini commerciali.

Le Olimpiadi di Fisica sono organizzate dall'AIF su mandato del



MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA