



Associazione  
per l'Insegnamento  
della Fisica



# Olimpiadi di Fisica

# 2021

35<sup>a</sup> Edizione

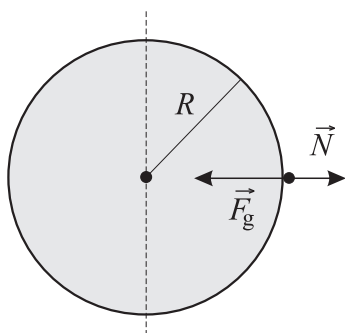
Gara di 2° Livello  
Lunedì 1° marzo 2021

## Soluzioni

### Quesiti

#### QUESITO n. 1

Il sassolino di massa  $m$ , posto all'equatore, è soggetto a due forze: la gravità del corpo celeste  $\vec{F}_g$  e la reazione normale  $\vec{N}$  che agiscono in direzioni opposte, entrambe lungo il raggio; in un sistema di riferimento inerziale, per il secondo principio della dinamica, la loro risultante è pari a  $m\vec{a}_c$  essendo  $\vec{a}_c$  l'accelerazione centripeta.



Scelto come positivo il verso dal centro del corpo celeste verso l'esterno e detta  $\omega$  la sua velocità angolare, si ha

$$\vec{F}_g + \vec{N} = m\vec{a}_c \Rightarrow -G\frac{Mm}{R^2} + N = -m\omega^2 R$$

Se il sassolino resta appoggiato deve essere  $N > 0$  e quindi

$$N = G\frac{Mm}{R^2} - m\omega^2 R > 0 \Rightarrow \omega^2 \leq G\frac{M}{R^3}$$

Sostituendo  $M$  in termini della densità  $\rho$  e  $\omega$  in termini del periodo di rotazione  $T$  si ha

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \leq G\frac{4/3\pi R^3\rho}{R^3} = \frac{4}{3}\pi G\rho \Rightarrow T_{\min} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

#### Soluzione alternativa

Il problema può essere risolto anche nel riferimento non inerziale, ruotante a velocità angolare  $\omega$ , e solidale con il corpo celeste. Poiché in questo riferimento il sassolino è fermo, si deve imporre che si annulli la risultante di tutte le forze che agiscono su di esso, comprese quelle apparenti, in questo caso la forza centrifuga:  $\vec{F}_{cf} = m\vec{a}_{cf}$ . L'equazione è quindi

$$\vec{F}_g + \vec{N} + \vec{F}_{cf} = 0 \Rightarrow -G\frac{Mm}{R^2} + N + m\omega^2 R = 0 \quad \text{che equivale alla precedente.}$$

#### Nota aggiuntiva

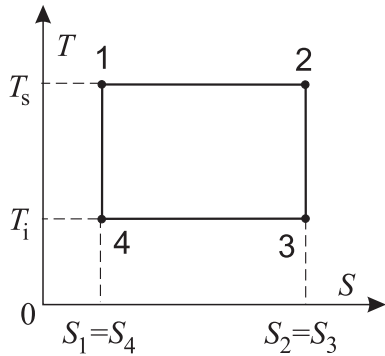
Il periodo trovato rappresenta, in prima approssimazione, il periodo minimo di rotazione che può avere un asteroide formato da detriti tenuti insieme dalla sola forza di gravità. Un asteroide monolitico, ovvero tenuto insieme da forze di stato solido, potrebbe invece avere anche un periodo di rotazione minore.

Sostituendo nella formula trovata una densità di  $2\text{ g cm}^{-3}$ , tipica degli asteroidi, si trova un periodo limite di rotazione di circa due ore.

Nel Sistema Solare sono stati misurati i periodi di rotazione di un grande numero di asteroidi (B.D. Warner, A.W. Harris, and P. Pravec. The asteroid lightcurve database. Icarus, 202(1):134146, 2009). Si nota che la distribuzione dei periodi di rotazione ha un taglio netto proprio in corrispondenza del valore limite del periodo calcolato in questo quesito: a parte rare eccezioni, tutti gli asteroidi di più di 200 metri di diametro hanno periodi di rotazione superiori. Questo fa pensare che gli asteroidi più grandi di questa dimensione non siano monolitici e siano tenuti insieme dalla loro stessa forza di gravità.

**QUESITO n. 2**

Le trasformazioni  $1 \rightarrow 2$  e  $3 \rightarrow 4$  sono delle isoterme e nel piano  $S - T$  sono rappresentate con dei segmenti paralleli all'asse dell'entropia. Le trasformazioni  $2 \rightarrow 3$  e  $4 \rightarrow 1$  sono delle adiabatiche per cui non ci sono scambi di calore:  $Q_{2 \rightarrow 3} = 0$  e  $Q_{4 \rightarrow 1} = 0$ .



Per definizione, in una trasformazione reversibile  $dS = \delta Q/T$ , per cui  $\Delta S_{2 \rightarrow 3} = 0$  e  $\Delta S_{4 \rightarrow 1} = 0$ . Da ciò segue che  $S_2 = S_3$  e  $S_4 = S_1$ . Il grafico, nel piano  $S - T$ , è quindi un rettangolo la cui area è data da

$$A = (T_s - T_i)(S_2 - S_1) = T_s(S_2 - S_1) - T_i(S_3 - S_4)$$

Per quanto detto sopra nel caso di un'isoterma a temperatura  $T$ , si può scrivere che  $Q = T \Delta S$ .

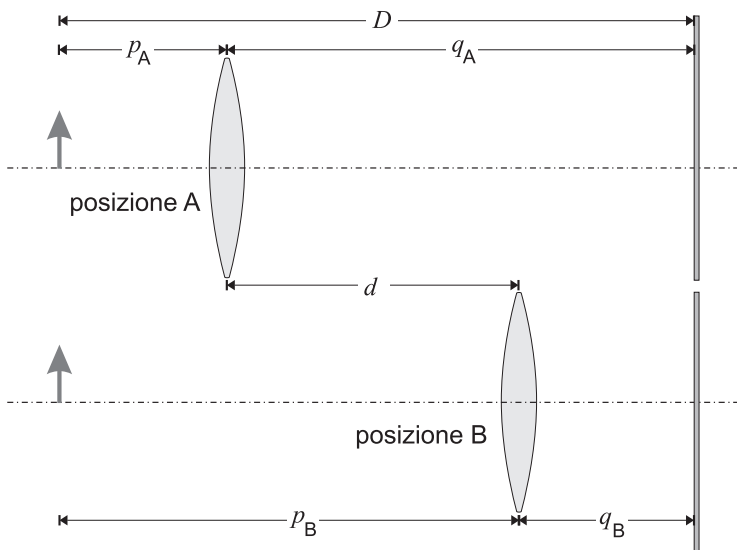
Ricordando che in questo ciclo solo nelle trasformazioni isoterme  $1 \rightarrow 2$  e  $3 \rightarrow 4$  si ha uno scambio di calore, si osserva che  $Q_{1 \rightarrow 2} = T_s(S_2 - S_1)$  è il calore assorbito mentre  $Q_{3 \rightarrow 4} = T_i(S_4 - S_3)$  è quello ceduto e che  $Q_{1 \rightarrow 2} > |Q_{3 \rightarrow 4}|$ .

Poiché in un ciclo  $\Delta U = 0$ , per il primo principio della termodinamica risulta che il lavoro netto è

$$\mathcal{L} = Q = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{3 \rightarrow 4} = T_s(S_2 - S_1) - T_i(S_3 - S_4) = A.$$

**NOTA per i correttori**  $\Rightarrow$  Assegnare 1 punto se il grafico è motivato e disegnato correttamente, comprese le grandezze sugli assi e i valori di  $T$  e  $S$  del ciclo; assegnare 2 punti per la soluzione corretta della parte successiva.

**QUESITO n. 3**



Il metodo proposto in questo quesito per misurare la distanza focale di una lente convergente è detto *metodo di Bessel*.

Dette  $p_A$  e  $q_A$  le distanze della lente da sorgente e schermo con la lente nella prima posizione, A, per il principio di reversibilità del cammino ottico si ottiene un'immagine a fuoco scambiando tra loro le posizioni di sorgente e schermo; questo equivale a porre la lente in una seconda posizione, B, tale che  $p_B = q_A$  e  $q_B = p_A$ , come in figura.

Si ricava subito che

$$p_A = \frac{D - d}{2} \quad \text{da cui}$$

$$q_A = D - p_A = \frac{D + d}{2}.$$

Per la legge dei punti coniugati,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{pq}{p+q} = \frac{D^2 - d^2}{4D} = \frac{D}{4} - \frac{d^2}{4D}$$

Si può osservare che l'espressione vale anche nel caso particolare in cui  $p = q$ : se è così esiste un'unica posizione per avere l'immagine a fuoco e risulta  $d = 0$  da cui  $f = D/4$ . L'ultima espressione mostra che deve essere sempre  $f \leq D/4$  per cui questa misura può essere effettuata solo scegliendo  $D \geq 4f$ .

## Soluzione alternativa 1

Dalla condizione  $p_A + q_A = D$  e dalla legge dei punti coniugati

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{pq}{p+q} \quad \text{si ha} \quad f = \frac{p_A(D-p_A)}{D}$$

Dalle stesse equazioni con  $(p_B, q_B)$  si ottiene analogamente

$$f = \frac{p_B(D-p_B)}{D}$$

Confrontando queste due espressioni si ricava che  $p_A(D-p_A) = p_B(D-p_B)$  da cui

$$(p_A - p_B)D = p_A^2 - p_B^2 = (p_A - p_B)(p_A + p_B).$$

Una soluzione è quella banale  $p_A = p_B$ , quando le due posizioni coincidono. L'unica soluzione non banale è  $p_A + p_B = D$ ; da questa relazione e dalla  $p_B - p_A = d$  si ha il sistema

$$\begin{cases} p_A + p_B = D \\ p_A - p_B = d \end{cases} \Rightarrow p_A = \frac{D-d}{2}$$

da cui, infine,

$$f = \frac{(D-d)/2 \cdot [D - (D-d)/2]}{D} = \frac{(D-d)(D+d)}{4D} = \frac{D^2 - d^2}{4D}.$$

## Soluzione alternativa 2

Procedendo come sopra si ottiene  $f = p(D-p)/D$ .

Questa è un'equazione di secondo grado in  $p$  che, scritta in forma normale, diventa:

$$p^2 - pD + fD = 0$$

Le due posizioni  $p_A$  e  $p_B$  sono le due soluzioni di questa equazione. Si impone che la loro differenza, pari alla radice del discriminante della soluzione, sia  $d$ :

$$d = \sqrt{\Delta} = \sqrt{D^2 - 4fD} \quad \text{da cui} \quad f = \frac{D^2 - d^2}{4D}.$$

Da questo procedimento risolutivo si può notare che la situazione fisica presentata è possibile solo se

$$D^2 - 4fD > 0.$$

ovvero per  $D \geq 4f$ , essendo  $D > 0$ .

## QUESITO n. 4

L'insegna è costituita di 4 elementi: i tre lati (cateti  $a, b$  e ipotenusa  $c$ ) e la circonferenza inscritta, di raggio  $r$ , le cui masse sono proporzionali alle rispettive lunghezze e i cui centri di massa sono nei punti medi dei segmenti e nel centro della circonferenza. Essi sono facilmente individuabili per mezzo delle loro coordinate nel piano cartesiano come in figura.

Il raggio e la lunghezza della circonferenza (inscritta) sono dati da

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = 20 \text{ cm} \Rightarrow C = 2\pi r = 125.7 \text{ cm}$$

Per trovare il punto di sospensione P (vedi figura) è sufficiente determinare la coordinata  $x$  del CdM, dato che l'insegna sarà sospesa nel punto dell'ipotenusa posto sulla verticale del CdM.

Se  $\lambda$  è la densità lineare del tondino di ferro utilizzato, le masse dei vari componenti sono  $m_i = \lambda \ell_i$ .

La coordinata  $x$  del CdM è data da

$$x_{\text{CdM}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \lambda \ell_i x_i}{\sum_i \lambda \ell_i} = \frac{\sum_i \ell_i x_i}{\sum_i \ell_i}$$

dove  $x_i$  è la coordinata  $x$  del CdM di ogni elemento; questi sono riportati nella tabella seguente, insieme alle corrispondenti coordinate  $y_i$

	$\ell_i$ [cm]	$x_i$ [cm]	$y_i$ [cm]
$a$	60	0	30
$b$	80	40	0
$c$	100	40	30
$C$	125.7	20	20

Sostituendo i valori numerici si trova

$$x_{\text{CdM}} = 26.6 \text{ cm}$$

RIS  $\Rightarrow$

$$26.4 \leq x_{\text{CdM}} \leq 26.8 \text{ [cm]}$$

Il punto di sospensione P deve distare 26.6 cm dal cateto verticale.

La posizione di P può essere individuata in altri modi: per esempio, con considerazioni su triangoli simili si ricava la sua distanza da uno degli estremi dell'ipotenusa:

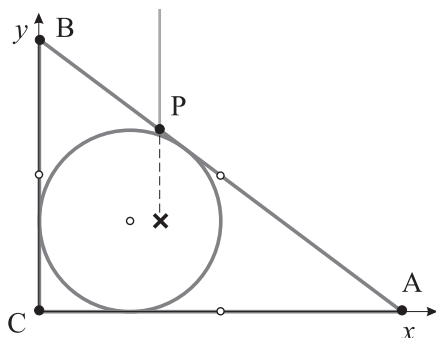
$$\overline{PB} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} x_{\text{CdM}} = 33.2 \text{ cm, oppure } \overline{PA} = \overline{AB} - \overline{PB} = 66.8 \text{ cm}$$

RIS  $\Rightarrow$

$$32.8 \leq \overline{PB} \leq 33.6 \text{ [cm]}$$

RIS  $\Rightarrow$

$$66.2 \leq \overline{PA} \leq 67.4 \text{ [cm]}$$



La coordinata  $y_{\text{CdM}}$  non è richiesta ma si troverebbe, analogamente,

$$y_{\text{CdM}} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \ell_i y_i}{\sum_i \ell_i} = 20.0 \text{ cm}$$

NOTA per i correttori  $\Rightarrow$  Il CdM dell'insegna si trova a una distanza di circa 1 mm dal baricentro del triangolo rettangolo; questo risultato è del tutto casuale e dunque, pur rientrando nell'intervallo di accettazione, la soluzione basata sulla determinazione del baricentro del triangolo non è accettabile.

#### QUESITO n. 5

La posizione di equilibrio è nel punto P, piede della perpendicolare condotta dal punto di aggancio O alla guida. Quando la massa è spostata di un tratto  $x$  dalla sua posizione di equilibrio, la componente della forza elastica lungo la guida è  $F_x = -kx$ .

Infatti, detto  $\ell$  l'allungamento della molla, il modulo della forza elastica è  $F = k\ell$  e la sua proiezione nella direzione della guida è  $F_x = F \cos \alpha$  essendo  $\alpha$  l'angolo acuto tra la direzione della molla e quella della guida; d'altra parte è  $x = \ell \cos \alpha$  per cui risulta

$$F_x = -F \cos \alpha = -k\ell \cos \alpha = -kx$$

In termini vettoriali sul piano  $(x, y)$ , con origine nel punto di aggancio, asse  $x$  parallelo alla guida e asse  $y$  ortogonale a questo, la forza elastica si scrive  $\vec{F} = -k\vec{r}$  con  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ , da cui  $F_x = -kx$ .

Di conseguenza il periodo delle oscillazioni è quello di una molla con costante elastica  $k$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

#### Soluzione alternativa

Dato che l'allungamento della molla è  $\ell = \sqrt{a^2 + x^2}$ , l'energia potenziale elastica vale

$$U = \frac{1}{2} k(a^2 + x^2) = U_0 + \frac{1}{2} kx^2$$

essendo  $U_0$  l'energia elastica minima, nel punto di equilibrio. Poiché – a meno di una costante – l'espressione dell'energia è la stessa del caso di una massa che oscilla nella direzione di allungamento della molla, il periodo sarà lo stesso.

NOTA per i correttori  $\Rightarrow$  Non vengono assegnati punti se la risposta non è giustificata.

## QUESITO n. 6

Quando si osserva lo spettro della luce emessa da due punti diametralmente opposti sull'equatore solare, poiché uno dei bordi si avvicina all'osservatore e l'altro si allontana, per l'effetto Doppler, si rileva da una parte uno spostamento verso il violetto e dalla parte opposta uno spostamento verso il rosso.

Detta  $\lambda_0$  la lunghezza d'onda (misurata in laboratorio) della riga  $H_\beta$  si ha, da un lato una lunghezza d'onda osservata  $\lambda_1 = \lambda_0 (1 + v/c)$ , dall'altro una lunghezza d'onda  $\lambda_2 = \lambda_0 (1 - v/c)$ . Perciò

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 2\lambda_0 \frac{v}{c} = 2 \frac{\lambda_0}{c} \frac{2\pi}{T_\odot} R_\odot = \frac{4\pi\lambda_0 R_\odot}{c T_\odot}$$

dove  $T_\odot$  il periodo di rotazione. Risulta quindi

$$T_\odot = \frac{4\pi\lambda_0 R_\odot}{c \Delta\lambda} = 2.12 \times 10^6 \text{ s} = 24.5 \text{ giorni}$$

$$\text{RIS} \Rightarrow 2.08 < T_\odot < 2.16 \quad [10^6 \text{ s}]$$

$$\text{RIS} \Rightarrow 24.1 < T_\odot < 24.9 \quad [\text{giorni}]$$

**Nota:** Detto  $R_\odot$  il raggio equatoriale del Sole, la velocità tangenziale, all'equatore del Sole, è  $v = 2\pi R_\odot / T \approx 2 \text{ km s}^{-1} \ll c$ . Resta quindi giustificato l'uso dell'espressione classica dell'effetto Doppler.

**NOTA per i correttori**  $\Rightarrow$  *Allo studente non è richiesto di dimostrare che l'espressione classica dell'effetto Doppler è valida in questo contesto.*

## QUESITO n. 7

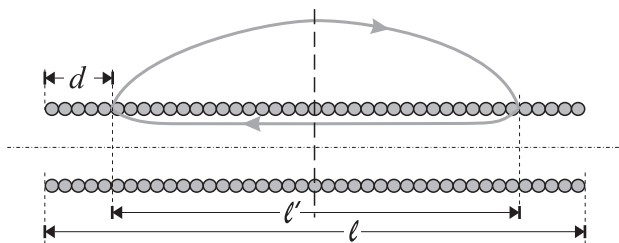
Per la legge di Ampère la circuitazione del campo  $\vec{B}$  lungo la linea di campo  $\gamma$  è

$$\mathcal{C}_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 N' I$$

dove  $N'$  è il numero di spire concatenate con la linea  $\gamma$  e  $I$  è la corrente nel solenoide. Dato che la densità lineare di spire è costante

$$\frac{N'}{\ell'} = \frac{N}{\ell}$$

dove  $\ell'$  è la lunghezza del tratto di solenoide racchiuso dalla linea di campo  $\gamma$ , e  $N$  e  $\ell$  sono rispettivamente il numero di spire e la lunghezza del solenoide.



Da qui risulta

$$\ell' = \frac{\ell}{N} N' = \frac{\ell}{N} \frac{\mathcal{C}_\gamma(\vec{B})}{\mu_0 I} = 16.0 \text{ cm}$$

Data la simmetria del solenoide, la linea di campo è simmetrica rispetto al piano mediano perpendicolare all'asse del solenoide.

La distanza dei punti in cui la linea di campo interseca il solenoide dalle estremità di questo è

$$d = \frac{\ell - \ell'}{2} = 2.0 \text{ cm}.$$

$$\text{RIS} \Rightarrow 1.9 < d < 2.1 \quad [\text{cm}]$$

**NOTA per i correttori**  $\Rightarrow$  *Assegnare 2 punti se lo studente non calcola  $d$ , ma solo  $\ell'$ .*

**Nota:** Per un approfondimento sulla geometria delle linee di campo di un solenoide reale, si può vedere il problema n.3 della Gara Nazionale delle Olimpiadi di Fisica del 2019.

## QUESITO n. 8

Si può osservare preliminarmente che con l'interruttore aperto la resistenza equivalente del circuito è maggiore di quando l'interruttore è chiuso e di conseguenza la potenza dissipata è minore; la variazione relativa risulterà quindi negativa.

La potenza dissipata è  $W = \mathcal{E}^2/R^*$ , dove  $R^*$  è la resistenza equivalente del circuito.

Con l'interruttore S chiuso i resistori sono in parallelo e la loro resistenza equivalente è  $R/2$ ; la resistenza equivalente del circuito è  $R_c^* = R/2 + r = (R + 2r)/2$ . Con l'interruttore aperto è  $R_a^* = R + r$ .

La variazione relativa della potenza è quindi

$$\eta = \frac{W_a - W_c}{W_c} = \frac{\mathcal{E}^2/(R+r) - 2\mathcal{E}^2/(R+2r)}{2\mathcal{E}^2/(R+2r)} = \left( \frac{1}{R+r} - \frac{2}{R+2r} \right) \frac{R+2r}{2} = \frac{R+2r-2R-2r}{2(R+r)} =$$

$$= \frac{-R}{2(R+r)} = -\frac{1}{2(1+\rho)}$$

#### QUESITO n. 9

Il primo rimbalzo è durato complessivamente 1 ora e 53 minuti, ovvero un tempo  $\Delta t = 6780$  s. Dal grafico si ricava che nel primo rimbalzo la massima altezza vale circa  $y_{\max} = 450$  m e viene raggiunta dopo  $\Delta t/2$ , quando  $v_y = 0$ . Poiché

$$y = v_{y,0}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{e} \quad v_y = v_{y,0} - gt$$

quando  $v_y = 0$  si ha  $v_{y,0} = g\Delta t/2$  che sostituita nella prima fornisce

$$y_{\max} = \frac{1}{8}g\Delta t^2 \Rightarrow g = \frac{8y_{\max}}{\Delta t^2} \approx 8 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-2} \quad \text{RIS} \Rightarrow \boxed{7.3 \leq g \leq 8.3 \quad [10^{-5} \text{ m s}^{-2}]}$$

ossia circa 5 ordini di grandezza inferiore a quella terrestre.

#### QUESITO n. 10

Sia  $A$  l'area di base del cilindro. La condizione di equilibrio meccanico iniziale è

$$p_a = \frac{p_a}{4} + \frac{M_0 g}{A} \Rightarrow \frac{M_0 g}{A} = \frac{3p_a}{4}$$

La condizione di equilibrio meccanico finale è

$$p_a = p_1 + \frac{(M_0/3)g}{A} \Rightarrow p_1 = p_a - \frac{p_a}{4} = \frac{3p_a}{4} = 0.75 p_a$$

La trasformazione è adiabatica reversibile, quindi

$$p_0 V_0^\gamma = p_1 V_1^\gamma \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{5}{3}$$

Sostituendo le pressioni nell'equazione della trasformazione adiabatica, si ricava

$$\frac{p_a}{4} V_0^\gamma = \frac{3}{4} p_a V_1^\gamma \quad \text{da cui} \quad V_1 = \frac{V_0}{3^{3/5}} = 0.517 V_0. \quad \text{RIS} \Rightarrow \boxed{0.516 \leq V_1 \leq 0.518 \quad [V_0]}.$$

**NOTA per i correttori**  $\Rightarrow$  Lo stato finale è  $(p_1, V_1)$ . Ricavare uno solo dei due valori non è una soluzione parziale del quesito, pertanto vale zero punti. Viene assegnato il punteggio completo anche se i coefficienti  $3/4$  e  $1/3^{3/5}$  non vengono espressi come numeri decimali.

Materiale elaborato dal Gruppo

	<p><b>PROGETTO OLIMPIADI</b>          Segreteria delle Olimpiadi Italiane di Fisica          e-mail: <a href="mailto:segreteria@olifis.it">segreteria@olifis.it</a>          WEB: <a href="http://www.olifis.it">www.olifis.it</a></p>	
---	--	---

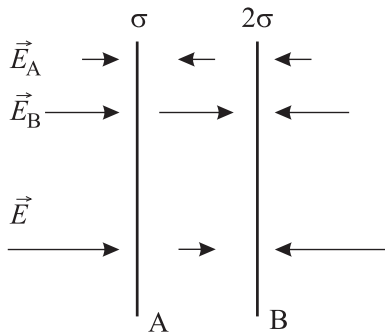
**NOTA BENE:** È possibile utilizzare, riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico questo materiale alle due seguenti condizioni: citare la fonte; non usare il materiale, nemmeno parzialmente, per fini commerciali.

## Problemi

### PROBLEMA n. 1 – Due piani carichi

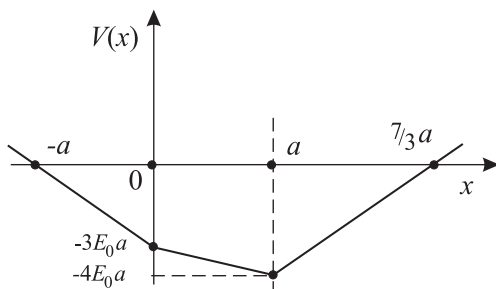
#### Quesito n. 1.

Si usa il principio di sovrapposizione. Il piano A di carica  $\sigma < 0$  determina un campo (diretto verso il piano) di modulo  $E_0 = |\sigma|/2\varepsilon_0$ . Analogamente per B il campo ha modulo  $2E_0$  ed è diretto verso questo piano. Il campo totale nelle regioni esterne è  $3E_0$  diretto verso i piani, all'interno è  $E_0$  diretto verso B, come mostrato in figura.



Il campo risulta

$$E(x) = \begin{cases} 3E_0 & \text{per } x < 0 \\ E_0 & \text{per } 0 < x < a \\ -3E_0 & \text{per } x > a \end{cases}$$



Nella situazione ipotizzata, nei punti  $x = 0$  e  $x = a$  il campo elettrico è discontinuo a causa della carica superficiale sui piani.

In ciascuna delle tre regioni definite dai piani A e B il campo elettrostatico è uniforme per cui il potenziale è una funzione lineare di  $x$  definita a meno di una costante additiva; la funzione  $V(x)$  si scrive quindi

$$V(x) = \begin{cases} -3E_0 x + c_1 & \text{per } x \leq 0 \\ -E_0 x + c_2 & \text{per } 0 \leq x \leq a \\ 3E_0 x + c_3 & \text{per } x \geq a \end{cases}$$

Una delle costanti deve essere scelta in modo che  $V(-a) = 0$  mentre le altre devono essere tali da rendere  $V(x)$  una funzione continua in  $x = 0$  e  $x = a$  (essendo definita come integrale del campo, il potenziale è sempre una funzione continua).

$$\begin{cases} -3E_0(-a) + c_1 = 0 \\ c_1 = c_2 \\ -E_0 a + c_2 = 3E_0 a + c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -3E_0 a \\ c_2 = c_1 = -3E_0 a \\ c_3 = -4E_0 a + c_2 = -7E_0 a \end{cases}$$

Si ottiene così la funzione  $V(x)$  rappresentata in figura

$$V(x) = \begin{cases} -3E_0(x + a) & \text{per } x \leq 0 \\ -E_0(x + 3a) & \text{per } 0 \leq x \leq a \\ 3E_0(x - 7/3 a) & \text{per } x \geq a \end{cases}$$

In alternativa si poteva utilizzare direttamente la definizione, avendo scelto come prima  $V(-a) = 0$  e tenendo conto ovviamente delle tre diverse espressioni del campo elettrico nelle tre regioni:

$$V(x) = - \int_{-a}^x E(x) dx$$

#### Quesito n. 2.

La particella, partendo da ferma da un punto posto a potenziale nullo, ha energia totale  $K + U = 0$  e si fermerà in un altro punto a potenziale nullo; questo si ha solo al di là di entrambi i piani

$$3E_0 \left( x - \frac{7}{3} a \right) = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3} a$$

**Quesito n. 3.**

La velocità massima si raggiunge nel punto di energia potenziale minima ovvero in  $x = a$ : per la conservazione dell'energia, essendo l'energia totale nulla si ha

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV(a) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 4qE_0 a \Rightarrow v = 2\sqrt{\frac{2qE_0 a}{m}}$$

**Quesito n. 4.**

La corrente iniziale è pari al rapporto tra la d.d.p. iniziale e la resistenza, quindi

$$i_0 = \frac{\Delta V}{R} = \frac{a E_0}{R}$$

**Quesito n. 5.**

L'equilibrio si raggiunge quando  $\Delta V = 0$ . Questo implica che il campo tra i due piani si annulla e che quindi la carica totale si divide in parti uguali tra i due piani: la densità è quindi

$$\sigma' = \frac{3}{2}\sigma$$

**PROBLEMA n. 2 – Piano inclinato scabro**
**Quesito n. 1.**

Dato che la massa si trova nello stesso punto negli istanti iniziale e finale, il lavoro fatto dalla forza d'attrito dinamico è pari alla variazione di energia cinetica.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2)$$

**Quesito n. 2.**

La forza di attrito dinamico ha lo stesso modulo sia in salita che in discesa. Essendo anche gli spostamenti uguali in modulo, il lavoro compiuto dall'attrito nella fase di salita è uguale a quello compiuto nella fase di discesa e quindi metà di quello totale.

Per determinare l'altezza massima raggiunta si può fare un bilancio energetico tra la posizione iniziale e la posizione di altezza massima, che sarà indicata con il pedice 1.

Fissando  $U_0 = 0$  e tenendo conto che  $K_1 = 0$ , si ha

$$K_1 + U_1 = K_0 + U_0 + \mathcal{L}/2 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{4}m(v_f^2 - v_0^2) = \frac{1}{4}m(v_0^2 + v_f^2) \quad \text{da cui} \quad h = \frac{v_0^2 + v_f^2}{4g}$$

**Quesito n. 3.**

L'altezza è data da  $h = d \sin \alpha$  per cui, dalle relazioni trovate sopra, si ha

$$d \sin \alpha = \frac{v_0^2 + v_f^2}{4g} \Rightarrow \alpha = \arcsen \frac{v_0^2 + v_f^2}{4gd}$$

La forza d'attrito dinamico ha modulo  $F_a = \mu mg \cos \alpha$  e dunque

$$\mathcal{L} = -2dF_a = -2\mu mgd \cos \alpha$$

pari alla variazione di energia cinetica. Si può scrivere allora

$$-2\mu mgd \cos \alpha = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2) \Rightarrow \mu = \frac{v_0^2 - v_f^2}{4gd \cos \alpha} = \frac{v_0^2 - v_f^2}{\sqrt{(4gd)^2 - (v_0^2 + v_f^2)^2}}$$

**Quesito n. 4.**

Poiché il corpo non rimane fermo nel punto di massima altezza, il valore massimo del modulo della forza di attrito statico  $\mu_s mg \cos \alpha$  deve essere minore del modulo della componente del peso parallela al piano inclinato, da cui

$$\mu_s mg \cos \alpha < mg \sin \alpha \Rightarrow \mu_s < \tan \alpha.$$



$\operatorname{tg} \alpha$  va espressa in funzione dei dati del problema.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

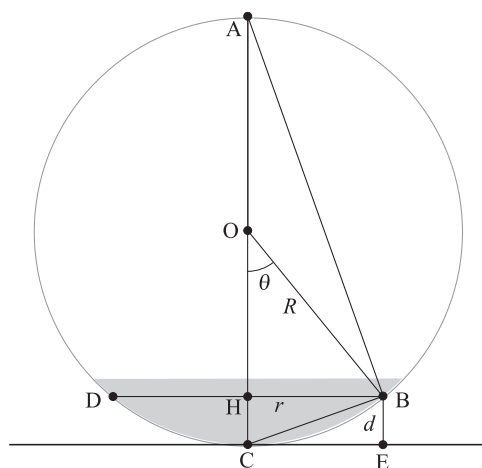
Sostituendo  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{v_0^2 + v_f^2}{4gd}$  si ottiene

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2 + v_f^2}{\sqrt{(4gd)^2 - (v_0^2 + v_f^2)^2}} \quad \text{da cui} \quad \mu_s < \frac{v_0^2 + v_f^2}{\sqrt{(4gd)^2 - (v_0^2 + v_f^2)^2}}$$

D'altra parte, il coefficiente d'attrito statico è sempre maggiore di quello dinamico, dunque

$$\frac{v_0^2 - v_f^2}{\sqrt{(4gd)^2 - (v_0^2 + v_f^2)^2}} < \mu_s < \frac{v_0^2 + v_f^2}{\sqrt{(4gd)^2 - (v_0^2 + v_f^2)^2}}$$

### PROBLEMA n. 3 – Anelli di Newton



#### Quesito n. 1.

Si consideri un punto B per il quale l'ampiezza dell'intercapedine tra lente e vetrino sia  $d$ , come mostrato in figura.

Si ha che  $r = R \operatorname{sen} \theta$  e  $d = R(1 - \cos \theta)$ . Quando  $d$  e  $\theta$ , sono piccoli, approssimando  $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$  e  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$  segue

$$r = R\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{r}{R} \quad \text{e} \quad d = R \frac{\theta^2}{2} = \frac{r^2}{2R} \quad \Rightarrow \quad r^2 = 2Rd.$$

Si hanno massimi di interferenza nella luce riflessa proveniente dai punti per i quali

$$2d = (k - 1/2)\lambda$$

dove  $k$  è un intero maggiore di zero e il termine  $1/2$  è dovuto allo sfasamento di  $\pi$  nella prima riflessione dal mezzo otticamente più denso. Si avranno quindi delle frange circolari chiare di interferenza con raggi dati da

$$r_k^2 = \frac{(2k - 1) R \lambda}{2}. \quad (*)$$

Per la 5ª frangia chiara è  $k = 5$  dal momento che la prima frangia chiara si ha per  $k = 1$ . Sostituendo  $r_5$ ,  $k$  e  $\lambda$  si ricava

$$R = \frac{2r_5^2}{(2k - 1) \lambda} = 9.43 \text{ m.}$$

$$\text{RIS} \Rightarrow \boxed{9.37 \leq R \leq 9.49 \quad [\text{m}]}$$

#### Soluzioni alternative

Vi sono almeno due altri metodi di giungere a determinare la differenza di cammino ottico dei due raggi di luce che interferiscono nel punto B della figura.

##### Metodo 1 - Col teorema di Pitagora

Lo strato d'aria è dato dal segmento  $d = \overline{BE} = \overline{OC} - \overline{OH} = R - \sqrt{R^2 - r^2}$ . Considerando l'incidenza parassiale della luce e supponendo che il raggio di curvatura  $R$  sia molto più grande del raggio della quinta frangia di interferenza si può raccogliere  $R$  dalla radice quadrata e usare l'approssimazione al prim'ordine

$$d = R - R\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \approx R - R\left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{r^2}{2R} \quad \Rightarrow \quad r^2 = 2Rd \quad (\text{come sopra})$$

Senza fare approssimazioni, la condizione d'interferenza costruttiva è

$$2R - 2\sqrt{R^2 - r_k^2} = (2k - 1) \frac{\lambda}{2}$$

Isolando la radice quadrata e quadrando entrambi i membri dell'equazione precedente si trova

$$R^2 - 2R(2k-1)\frac{\lambda}{4} + (2k-1)^2\frac{\lambda^2}{16} = R^2 - r_k^2$$

$$r_k^2 + (2k-1)^2\frac{\lambda^2}{16} = R(2k-1)\frac{\lambda}{2}$$

$$R = \frac{r_k^2 + (2k-1)^2\lambda^2/16}{(2k-1)\lambda/2} = 9.43 \text{ m}$$

Il primo addendo al numeratore è dell'ordine di  $10^{-5}$ , il secondo addendo è dell'ordine di  $10^{-12}$ , del tutto trascurabile rispetto al primo.

### Metodo 2 - Col teorema di Euclide

Sia  $\overline{AC} = 2R$  il diametro della circonferenza di cui il profilo della lente è un arco. Il triangolo ACB della figura è retto in B e il segmento HB è l'altezza relativa all'ipotenusa AC. L'altezza HB è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti AB e BC sull'ipotenusa

$$r^2 = d(2R - d) \approx 2Rd \quad (\text{come sopra})$$

avendo approssimato al primo ordine come prima, ovvero trascurando  $d^2$  rispetto a  $2Rd$ .

### Quesito n. 2.

La distanza focale di una lente sottile è data dalla formula

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

(detta *formula dei costruttori di lenti*) dove  $R_1$  ed  $R_2$  sono i raggi di curvatura delle due superfici della lente. Nel nostro caso, tenendo conto che  $R_2 = \infty$  poiché una delle due superfici è piana, il risultato per la distanza focale è

$$f = 18.9 \text{ m}.$$

$$\text{RIS} \Rightarrow \boxed{18.7 \leq f \leq 19.1 \quad [\text{m}]}$$

### Quesito n. 3.

Utilizzando la formula (\*) ricavata nella prima domanda, si ha per la terza frangia chiara ( $k = 3$ )

$$r_3 = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}} = 3.73 \text{ mm}.$$

$$\text{RIS} \Rightarrow \boxed{3.71 \leq r_3 \leq 3.75 \quad [\text{mm}]}$$

### Quesito n. 4.

Se il piano si allontana per una distanza  $s$ , la relazione precedente  $2d = (k - 1/2)\lambda$  resta valida, mentre l'espressione di  $r_k^2$ , in funzione di  $s$ , diventa

$$r_k^2(s) = 2R(d - s) = \frac{2k-1}{2}R\lambda - 2Rs.$$

Aumentando  $s$  diminuisce  $r$ : le frange si stringono e scompaiono al centro, mentre vengono rimpiazzate da quelle più esterne.

### Quesito n. 5.

Inizialmente, per  $s = 0$ , si osserva la terza frangia chiara ( $k_{\text{in}} = 3$ ) e dunque il punto fissato di osservazione è a una distanza  $r_{k_{\text{in}}}(0)$  dal vertice della lente data da

$$r_{k_{\text{in}}}(0) = \frac{2k_{\text{in}}-1}{2}R\lambda.$$

Dopo un giro della vite micrometrica lo spostamento del piano di vetro è  $s = 0.100 \text{ mm}$  e la frangia osservata nello stesso punto sarà quella di raggio  $r_k(s)$ , ricavato sopra, per cui

$$r_{k_{\text{in}}}(0) = r_k(s) \Rightarrow \frac{2k_{\text{in}}-1}{2}R\lambda = \frac{2k-1}{2}R\lambda - 2Rs.$$

Risolvendo per  $k$  si ottiene

$$k = k_{\text{in}} + \frac{2s}{\lambda} = 343.$$

$$\text{RIS} \Rightarrow \boxed{341 \leq k \leq 345}$$

Sono quindi passate dal punto fissato

$$N = k - k_{\text{in}} - 1 = 339 \text{ frange}.$$

$$\text{RIS} \Rightarrow \boxed{337 \leq N \leq 341}$$