Associazione per l'Insegnamento della Fisica

Progetto OLIFIS

Campionati di Fisica 2024

38ª edizione

lunedì 19 febbraio 2024
Gara di 2° Livello

Soluzione

Quesiti

QUESITO n. 1

Assumendo come quota zero la quota del punto B si ha $h_\mathrm{A} = L(1 - \cos\theta)$. Poiché gli attriti sono trascurabili l'energia meccanica si conserva e quindi

$$mgh_\mathrm{A} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2 \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{B} = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)} = 2.2097\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{2.21\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$

QUESITO n. 2

La presenza della carica puntiforme q, e la conseguente formazione di cariche indotte sulle superfici interna ed esterna del guscio conduttore, non modifica il fatto che questo era e resta globalmente neutro. Ne segue che la carica totale indotta sulla superficie interna, Q_i, e quella indotta sulla superficie esterna, Q_e, sono opposte: $Q_\mathrm{e} = -Q_\mathrm{i}$. Le due distribuzioni sono uniformi per simmetria sferica, per cui

$$\frac{\sigma_\mathrm{int}}{\sigma_\mathrm{est}} = \frac{Q_\mathrm{i}/(4\pi r^2)}{-Q_\mathrm{i}/[4\pi(r+\alpha\, r)^2]} = -(1+\alpha)^2\,.$$

Si osserva che con il teorema di Gauss si può dimostrare che la carica totale sulla superficie interna è in modulo uguale a q e di segno opposto.

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Togliere 1 punto in caso di omissione del segno negativo.*

QUESITO n. 3

Nella diffrazione da un reticolo i massimi si formano nelle direzioni individuate dalla relazione $p\,\mathrm{sen}\,\theta_k = \pm\,k\lambda$ dove $k = 0, 1, 2, \ldots$ e θ_k è l'angolo formato tra la perpendicolare allo schermo e il raggio emergente dal reticolo.

La figura di diffrazione è simmetrica rispetto al massimo centrale; ci si può limitare a esaminarne una delle due parti.
Per le righe rosse e verdi i massimi si trovano, rispettivamente, nelle posizioni

$$\mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{R},k_\mathrm{R}} = k_\mathrm{R}\frac{\lambda_\mathrm{R}}{p} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{V},k_\mathrm{V}} = k_\mathrm{V}\frac{\lambda_\mathrm{V}}{p}\,.$$

La sovrapposizione di due righe si avrà quando le direzioni coincidono ($\mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{R},k_\mathrm{R}} = \mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{V},k_\mathrm{V}}$), ovvero per

$$\frac{k_\mathrm{V}}{k_\mathrm{R}} = \frac{\lambda_\mathrm{R}}{\lambda_\mathrm{V}} = \frac{4}{3}\,.$$

La prima posizione in cui le righe dei due colori si sovrappongono è per $k_\mathrm{R} = 3$ e $k_\mathrm{V} = 4$ dove risulta

$$\operatorname{sen}\theta_{\mathrm{R},3} = \operatorname{sen}\theta_{\mathrm{V},4} = 3\,\frac{\lambda_\mathrm{R}}{p} = 4\,\frac{\lambda_\mathrm{V}}{p} = 0.068\,.$$

Poiché $\lambda \ll p$, per i primi valori di k si è in regime di angoli piccoli; pertanto si può fare l'approssimazione $x = D\ \mathrm{tg}\,\theta \approx D\ \operatorname{sen}\theta$. Sostituendo il valore trovato si ricava

$$x = 0.068\,D = 6.8\,\mathrm{cm}\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{6.80\,\mathrm{cm}}$

Se non si fa l'approssimazione per piccoli angoli, si ottiene

$$x = D\ \mathrm{tg}\,(\operatorname{arcsen} 0.068) = 6.82\,\mathrm{cm}\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{6.82\,\mathrm{cm}}$

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Il valore da considerare valido, tra i due, è quello coerente con il procedimento seguito dallo studente.*

QUESITO n. 4

La percentuale di ossigeno che passa per lo spiraglio della finestra è uguale alla percentuale di aria che esce dalla stanza.

Il sistema iniziale è costituito da n_1 moli di aria alla temperatura T_1, quello finale da n_2 moli alla temperatura T_2. L'aria fuoriesce per equilibrare la pressione interna a quella esterna, quindi $p_2 = p_1 = p_\mathrm{atm}$; inoltre anche il volume resta inalterato. Dall'equazione di stato si ha allora

$$n_1 = \frac{pV}{RT_1} \quad \text{e} \quad n_2 = \frac{pV}{RT_2} \quad \text{da cui} \quad n_1 - n_2 = \frac{pV}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\,.$$

La variazione relativa è dunque

$$\frac{n_1 - n_2}{n_1} = \frac{pV}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\frac{RT_1}{pV} = \frac{\Delta T}{T_2} = 0.01369 = 1.369\,\%\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{1.37\,\%}$

In alternativa si può risolvere il quesito in modo più sintetico, ma approssimato.

Tenuto conto che il prodotto pV resta costante, per l'equazione di stato dei gas perfetti si ha che $nT =$ costante da cui, a meno di termini di ordine superiore (in Δn e ΔT), si ha

$$\frac{\Delta(nT)}{nT} = \frac{\Delta n}{n} + \frac{\Delta T}{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta n}{n} = -\frac{\Delta T}{T}\,.$$

Per $T_1 = 288.15\,\mathrm{K}$ e $\Delta T = 4\,\mathrm{K}$ si ha

$$\frac{\Delta T}{T_1} = 0.01388 = 1.388\,\%\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{1.39\,\%}$

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Sono accettati entrambi i modi di soluzione con il rispettivo valore numerico.*

QUESITO n. 5

Si indichino con T_1 e T_2 i moduli della tensione del filo rispettivamente sotto e sopra la fenditura. Poiché filo e carrucola sono ideali, T_2 è costante in tutto il tratto di filo compreso tra la fenditura e m_2, e T_1 in quello tra la fenditura e m_1.

Poiché il filo è inestensibile le accelerazioni dei due blocchetti hanno lo stesso modulo:

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a\,.$$

Inoltre, siccome il sistema si mette in movimento spontaneamente partendo dalla quiete, evidentemente m_2 scende e m_1 sale, e dunque l'attrito che la fenditura esercita sulla fune è diretto verso il basso.

Considerando allora il tratto di filo che passa nella fenditura, vediamo che è sottoposto a tre forze: $\vec{T}_2$ verso l'alto, $\vec{T}_1$ e $\vec{A}$ verso il basso. Poiché il filo ha massa trascurabile, per la seconda legge della dinamica la risultante di queste tre forze dev'essere nulla:

$$\vec{T}_2 + \vec{T}_1 + \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = A\,.$$

Sempre per la seconda legge della dinamica, si ha (ricordando il verso delle accelerazioni dei due blocchetti)

$$\vec{T}_1 + \vec{P}_1 = m_1\vec{a}_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 - m_1 g = m_1 a\,,$$
$$\vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2\vec{a}_2 \quad \Rightarrow \quad m_2 g - T_2 = m_2 a\,.$$

Sommando membro a membro le tre equazioni si ottiene

$$a = \frac{(m_2 - m_1)\,g - A}{m_1 + m_2}\,.$$

QUESITO n. 6

Nel resistore R_1 scorre una corrente $i = V/R_1 = V/R$ mentre nel resistore R_3 scorre una corrente

$$i' = \frac{V}{R_2 + R_3} = \frac{V}{5R}\,.$$

Si ha dunque

$$\frac{P_1}{P_3} = \frac{R\,i^2}{3R\,i'^2} = \frac{V^2/R}{3RV^2/(25R^2)} = \frac{25}{3} = 8.3333\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{8.33}$

QUESITO n. 7

Il segnale sonoro ha viaggiato a una velocità $v = 2h/t$ e la lunghezza d'onda del segnale sonoro in acqua vale

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2h}{t\,f} = 1.2921\,\mathrm{m}\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{1.29\,\mathrm{m}}$

QUESITO n. 8

Durante il raffreddamento adiabatico non c'è scambio di calore, mentre durante il riscaldamento isocoro il sistema assorbe calore ($L = 0, \Delta T > 0$ dunque, essendo un gas perfetto, $\Delta U > 0$, quindi $Q > O$), pertanto il calore ceduto a ogni ciclo è il calore rilasciato durante la compressione isobara.

Che nella trasformazione BC il sistema ceda calore lo si può capire anche osservando che nella compressione isobara il sistema riceve lavoro (per convenzione $L < 0$) e contemporaneamente si raffredda ($\Delta T < 0$ quindi $\Delta U < 0$). Per il primo Principio ne consegue allora che $Q < 0$, ovvero che il sistema cede calore.

Essendo il gas biatomico si ha che $c_p = {}^7\!/_2\,R$ e quindi il calore ceduto per ogni ciclo è

$$Q_1 = c_p\,n\,\Delta T = c_p\frac{p\,\Delta V}{R} = \frac{7}{2}\,p_{\mathrm{B}}\,(V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{B}}).$$

Il calore necessario per portare l'acqua da 20 °C alla temperatura di ebollizione è

$$Q = m\,c_{\mathrm{a}}\Delta T_{\mathrm{a}} = \rho_{\mathrm{a}}\,V_{\mathrm{a}}\,c_{\mathrm{a}}\Delta T_{\mathrm{a}}$$

dove $\rho_{\mathrm{a}}, c_{\mathrm{a}}, V_{\mathrm{a}}$ e ΔT_{a} sono rispettivamente la densità, il calore specifico, il volume e la variazione di temperatura dell'acqua.

Se f è la frequenza a cui opera la macchina, il tempo necessario è

$$t = \frac{Q}{f\;|Q_1|} = 518\,\mathrm{s} = 8.633\,\mathrm{min}\,.$$

RISPOSTE VALIDE $\Rightarrow$ $\boxed{518\,\mathrm{s} \quad \text{oppure} \quad 8.63\,\mathrm{min} \quad \text{oppure} \quad 8^{\mathrm{m}}\,38^{\mathrm{s}}}$

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Assegnare 1 punto per l'espressione di Q_1, 1 punto per l'espressione di Q e 1 punto per la risposta numerica valida.*

QUESITO n. 9

Si consideri il sistema costituito dalla ragazza, dallo skateboard e dallo zainetto. Le forze esterne che agiscono su questo sistema sono: i pesi, la forza normale esercitata dalla strada sullo skateboard e l'attrito. Se quest'ultimo è trascurabile, si può dire che non ci sono forze esterne che agiscono in direzione orizzontale, e dunque la componente orizzontale della quantità di moto del sistema si conserva.

Detto u il modulo della velocità dello skateboard si avrà

$$Mu - mv\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{mv\cos\theta}{M}\,.$$

La distanza percorsa dalla ragazza sullo skateboard nel tempo t è $d_1 = ut$ e quella dello zainetto $d_2 = v\cos(\theta)\,t$.

Poiché lo spostamento dello zainetto e quello della ragazza sullo skateboard hanno versi opposti, la distanza cercata è la somma

$$d_1 + d_2 = \frac{m}{M}\,v\cos(\theta)\,t + v\,\cos(\theta)\,t = \left(\frac{m}{M}+1\right)\,v\,\cos(\theta)\,t = 3.2378\,\mathrm{m}\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{3.24\,\mathrm{m}}$

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Assegnare 1 punto per la conservazione della componente orizzontale della quantità di moto, 1 punto per il calcolo di entrambe le distanze (0 punti per una sola distanza), 1 punto per il risultato numerico.*

QUESITO n. 10

Sia H il livello cercato. Lo zampillo esce orizzontalmente e quindi impiega un tempo $t = \sqrt{2h/g}$ per cadere. Di conseguenza la velocità di uscita dal foro è pari a $v = d/t = d\sqrt{g/(2h)}$.

Se la viscosità è trascurabile, si può applicare il teorema di Bernoulli; considerando la superficie libera del liquido (1) e il foro (2) si ha

$$p_1 + \rho g H + \frac{1}{2}\,\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h + \frac{1}{2}\,\rho v_2^2\,.$$

Per l'equazione di continuità $A_1 v_1 = A_2 v_2$; poiché $A_2 \ll A_1$, si ha $v_1 \ll v_2$ e di conseguenza il termine $1/2\,\rho v_1^2$ può essere trascurato. Inoltre $p_1 = p_2 = p_{\mathrm{atm}}$. Tenendo conto di questo, si ottiene

$$v_2 = \sqrt{2g\,(H-h)} \quad \text{(teorema di Torricelli)}.$$

Uguagliando questa espressione a quella ricavata dal tempo di caduta si trova

$$\sqrt{2g\,(H-h)} = d\sqrt{g/(2h)} \quad \Rightarrow \quad H = h + \frac{d^2}{4h} = 3.5583\,\mathrm{m}\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{3.56\,\mathrm{m}}$.

Materiale elaborato dal Gruppo

Problemi

PROBLEMA n. 1 – Auto elettriche e frenate rigenerative

Quesito n. 1.

L'energia U immagazzinata nella batteria tradizionale è $U_{\rm tr} = QV$ dove $V = 12\,{\rm V}$ e $Q = 70\,{\rm A\,h}$; quindi $U_{\rm tr} = 840\,{\rm W\,h}$.

La grandezza misurata in A h è chiaramente una carica elettrica e $1\,{\rm A\,h} = 1\,{\rm A} \times 3\,600\,{\rm s} = 3.6 \times 10^3\,{\rm C}$. La batteria è comunque un oggetto elettricamente neutro: la carica di $70\,{\rm A\,h} = 2.52 \times 10^5\,{\rm C}$ è quella che la batteria può far circolare erogando tutta la sua energia.

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{0.840\,{\rm kW\,h}}$

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *In questo quesito, come in altri a seguire, è richiesto di usare una specifica unità di misura; il risultato espresso diversamente, per esempio qui in joule, è da considerare errato.*

Quesito n. 2.

Dai dati forniti si ricava il consumo $C = 13.2\,{\rm kW\,h}/100\,{\rm km} = 0.132\,{\rm kW\,h\,km^{-1}}$; indicata con A l'autonomia dell'automobile l'energia $U_{\rm el}$ della batteria completamente carica vale

$$U_{\rm el} = AC = 67.716\,{\rm kW\,h} \quad \text{per cui} \quad U_{\rm el}/U_{\rm tr} = 80.614\,.$$

Si dovrebbero utilizzare almeno 81 batterie tradizionali.

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{81}$

Quesito n. 3.

L'automobile ha un'energia cinetica iniziale $E_{\rm in} = {}^1\!/_2\, m v_{\rm in}^2$ e una finale $E_{\rm fin} = {}^1\!/_2\, m v_{\rm fin}^2$.

L'energia complessivamente recuperata è quindi pari a

$$E_{\rm rec} = 10 \times 0.85\ (E_{\rm in} - E_{\rm fin}) = 10 \times 0.85 \times \frac{1}{2}\, m\ \left(v_{\rm in}^2 - v_{\rm fin}^2\right)\ .$$

Quindi, ricordando che $1\,{\rm kW\,h} = 1\,{\rm kW} \times 3600\,{\rm s} = 3.6 \times 10^6\,{\rm J}$, ed essendo

$$v_{\rm fin} = 0\,{\rm km/h}, \quad v_{\rm in} = 30\,{\rm km/h} \quad \Rightarrow \quad E_{\rm rec} = 5.2092 \times 10^5\,{\rm J} = 0.1447\,{\rm kW\,h}\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{0.145\,{\rm kW\,h}}$

Quesito n. 4.

La forza frenante F vale

$$F = m\,a = m\,(0.9\,g)\,.$$

La potenza frenante iniziale P_0 vale

$$P_0 = F\,v_0 = m\,(0.9\,g)\,v_0 = 562.53\,{\rm kW}\,.$$

RISPOSTE VALIDE $\Rightarrow$ $\boxed{562\,{\rm kW} \quad \text{oppure} \quad 563\,{\rm kW}}$

Quesito n. 5.

Dato che la potenza frenante all'inizio della frenata è maggiore della potenza massima, $P_{\rm max}$, che può essere assorbita, non tutta l'energia potrà essere recuperata.

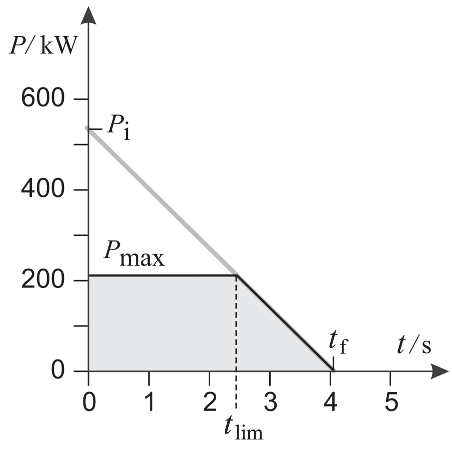
Se l'accelerazione (in questo caso negativa) è costante la velocità diminuisce linearmente con il tempo $[v(t) = v_0 - 0.9\,g\,t]$ e dunque anche la potenza frenante varia allo stesso modo

$$P(t) = F\,v(t) = m\,(0.9\,g)\,(v_0 - 0.9\,g\,t) = P_0 - m\,(0.9\,g)^2\,t\,.$$

Dunque in una prima fase il generatore potrà assorbire 208 kW e la potenza restante sarà dissipata dall'impianto frenante. Sotto un certo valore della velocità, invece, la potenza frenante richiesta sarà minore di 208 kW e quindi potrà essere assorbita tutta dal generatore, recuperando l'85 % dell'energia.

Questo valore limite della velocità si calcola come

$$v_{\rm lim} = \frac{P_{\rm max}}{m\,(0.9g)} = 13.352\,{\rm m\,s^{-1}} = 48.068\,{\rm km/h}\,.$$



Questa velocità verrà raggiunta in un tempo

$$t_\mathrm{lim} = \frac{v_0 - v_\mathrm{lim}}{0.9g} = 2.579\,\mathrm{s}\,.$$

La durata totale della frenata sarà invece

$$t_\mathrm{f} = \frac{v_0}{0.9g} = 4.0915\,\mathrm{s}\,.$$

L'energia recuperata sarà data dall'85 % dell'area sotto al grafico che si può calcolare come

$$E_\mathrm{rec} = 0.85\left[\frac{1}{2}\,P_\mathrm{max}\,(t_\mathrm{f} + t_\mathrm{lim})\right] = 5.897\times 10^5\ \mathrm{J} = 0.1638\,\mathrm{kW\,h}\,.$$

RISPOSTA VALIDA ⇒ $\boxed{0.164\,\mathrm{kW\,h}}$

Tale energia rappresenta una frazione dell'energia totale pari a

$$\frac{E_\mathrm{rec}}{E_0} = \frac{E_\mathrm{rec}}{1/2\,mv_0^2} = 51.24\,\%\,.$$

RISPOSTA VALIDA ⇒ $\boxed{51.2\,\%}$

Quesito n. 6.

Durante la discesa a velocità costante l'energia cinetica non cambia mentre, frenando, si utilizza la variazione di energia potenziale $\Delta U = mg\,\Delta h$; l'energia recuperata vale $E_\mathrm{rec} = 0.85\,|\Delta U| = 5.3128\,\mathrm{kW\,h}$ corrispondenti a 40.248 km di percorrenza aggiuntiva.

RISPOSTE VALIDE ⇒ $\boxed{5.31\,\mathrm{kW\,h} \quad\Rightarrow\quad 40.2\,\mathrm{km}}$

PROBLEMA n. 2 – Radiazione infrarossa

Quesito n. 1.

Per la legge di Wien $\lambda_\mathrm{max}\,T = b$ (costante), considerando una temperatura corporea di 37 °C pari a $T = 310.15\,\mathrm{K}$, si ha

$$\lambda_\mathrm{max} = \frac{b}{T} = 9.3464\,\mu\mathrm{m}\,.$$

La potenza totale irradiata si ottiene dalla legge di Stefan-Boltzmann

$$P = \sigma\,T^4\,A = 104.73\,\mathrm{W}\,.$$

RISPOSTE VALIDE ⇒ $\boxed{\lambda_\mathrm{max} = 9.35\,\mu\mathrm{m} \quad \mathrm{e} \quad P = 105\,\mathrm{W}}$

Quesito n. 2.

La propagazione della radiazione e.m. è descritta dal campo vettoriale del vettore di Poynting, definito come $\vec{E}\times\vec{B}/\mu$, che in prossimità della schiena, considerata come una superficie piana, è uniforme e perpendicolare ad essa.

La potenza incidente per unità di superficie su S, posta a piccola distanza dalla schiena (5 cm) è uguale a quella irradiata per unità di superficie dalla schiena

$$I = \frac{P}{A} = 500\,\mathrm{W\,m^{-2}}\,.$$

RISPOSTA VALIDA ⇒ $\boxed{500\,\mathrm{W\,m^{-2}}}$

Quesito n. 3.

Se $d = 20\,\mathrm{m}$, invece, la schiena si può considerare come una sorgente puntiforme, il campo $\vec{S}$ è radiale e isotropo in un semispazio e la potenza irradiata si può considerare distribuita uniformemente su una semisfera di raggio d; quindi la potenza per unità di superficie incidente su S è pari a

$$I = \frac{P}{2\pi d^2} = 0.03979\,\mathrm{W\,m^{-2}}\,.$$

RISPOSTA VALIDA ⇒ $\boxed{3.98\times 10^{-2}\,\mathrm{W\,m^{-2}}}$

PROBLEMA n. 3 – Particella carica verso un filo

Quesito n. 1.

Si scelga un punto della traiettoria, per esempio quello più vicino al filo. Considerato il verso della corrente, il campo magnetico nel semipiano inferiore è perpendicolare entrante. Allora la forza di Lorentz $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$, è nel piano della figura e, secondo la regola della mano destra, risulta diretta verso l'alto se la carica è positiva. Nel caso in esame, poiché la forza fa deviare la carica verso il basso, essa risulta negativa.

Può aiutare una regola mnemonica per la forza di Lorentz: essa afferma che *una particella carica positivamente che si muove su un piano sul quale il campo magnetico è perpendicolare uscente viene deviata verso destra rispetto alla direzione di moto.*

Qui, nel semipiano inferiore il campo magnetico è entrante per cui la particella, che è deviata verso destra, deve avere carica negativa.

In alternativa, considerando la particella carica in moto come un elemento di corrente parallela al filo nel punto più vicino, la forza tra le due correnti appare repulsiva; questo accade quando i versi delle correnti sono opposti, quindi quando la carica è negativa.

Quesito n. 2.

Poiché la forza magnetica (di Lorentz) è ortogonale al moto, il lavoro fatto è nullo e il modulo della velocità resta costante, per cui

$$v = v_0 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,. \qquad \text{RISPOSTA VALIDA} \quad \Rightarrow \quad \boxed{2.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

Quesito n. 3.

La forza magnetica nel punto di massimo avvicinamento ha modulo

$$F_\mathrm{m} = qv_0B = qv_0\frac{\mu_0 I}{2\pi\, d}\,.$$

Questa imprime un'accelerazione centripeta per cui

$$qv_0\frac{\mu_0 I}{2\pi\, d} = \frac{mv_0^2}{r} = \frac{mv_0^2}{2d} \quad\Rightarrow\quad I = \frac{\pi m v_0}{\mu_0\, q} = 1.8116\,\mathrm{A}\,. \qquad \text{RISPOSTA VALIDA} \quad \Rightarrow \quad \boxed{1.81\,\mathrm{A}}$$

Quesito n. 4.

La potenza dissipata da un tratto filo di lunghezza ℓ è

$$W = R\,I^2 \quad \text{con} \quad R = \rho_\mathrm{Cu}\frac{\ell}{\pi a^2}$$

dove a è il raggio del filo; ne segue che la potenza per unità di lunghezza è

$$W_\ell = \frac{\rho_\mathrm{Cu}}{\pi a^2}\,I^2 \quad \text{da cui} \quad a = I\sqrt{\frac{\rho_\mathrm{Cu}}{\pi W_\ell}} = 4.1893\,\mathrm{mm}\,. \qquad \text{RISPOSTA VALIDA} \quad \Rightarrow \quad \boxed{4.19\,\mathrm{mm}}$$

PROBLEMA n. 4 – Massa e molla al soffitto

Quesito n. 1.

La condizione di equilibrio tra forza elastica e peso dà

$$k\,\Delta\ell_0 - Mg = 0 \quad\Rightarrow\quad \Delta\ell_0 = \frac{Mg}{k}\,.$$

Quesito n. 2.

Si indichino rispettivamente con v_1' e con v_0' la velocità dopo l'urto del corpo appeso alla molla e di quello che urta. Dalla conservazione di quantità di moto ed energia si ottiene $v_0' = 0$, $v_1' = v_0$. Questo è un risultato noto: in un urto elastico unidimensionale, due corpi di uguale massa si scambiano le velocità.

Il corpo compie un moto armonico attorno alla sua posizione di equilibrio. Poiché v_0 è la velocità nel centro dell'oscillazione, la relazione tra l'ampiezza A del moto e v_0 è

$$v_0 = \omega A, \quad \text{dove} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \text{da cui} \quad A = v_0\sqrt{\frac{M}{k}}\,.$$

Dunque l'allungamento massimo della molla è $\Delta\ell_{\max} = \Delta\ell_0 + A = \dfrac{Mg}{k} + v_0\sqrt{\dfrac{M}{k}}$.

Soluzione alternativa

L'energia del sistema è la somma dell'energia cinetica, di quella potenziale elastica e di quella gravitazionale. Si fissa un asse z verticale, orientato verso l'alto, con l'origine nella posizione in cui la molla ha la sua lunghezza naturale. In questo riferimento, $z = -\Delta\ell$, e l'espressione dell'energia della molla in una posizione generica è

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}kz^2 + Mgz\,.$$

L'espressione dell'energia del sistema massa-molla, nel centro dell'oscillazione, è

$$E_0 = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}k\,\Delta\ell_0^2 - Mg\,\Delta\ell_0 = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{M^2g^2}{2k} - \frac{M^2g^2}{k} = \frac{1}{2}Mv_0^2 - \frac{M^2g^2}{2k}\,.$$

Negli estremi dell'oscillazione, la velocità del corpo è nulla, e l'espressione dell'energia è

$$E_{\text{estr}} = \frac{1}{2}k\Delta\ell_{\text{estr}}^2 - Mg\,\Delta\ell_{\text{estr}}\,.$$

Uguagliando queste espressioni e risolvendo per $\Delta\ell_{\text{estr}}$ si ottiene

$$\Delta\ell_{\text{estr}} = \frac{Mg \pm \sqrt{M^2g^2 + Mkv_0^2 - M^2g^2}}{k} = \frac{Mg}{k} \pm v_0\sqrt{\frac{M}{k}}\,.$$

L'allungamento massimo, $\Delta\ell_{\max}$, corrisponde evidentemente alla soluzione col segno positivo.

Quesito n. 3.

Le equazioni precedenti danno $\Delta\ell_0 = 9.8067\,\text{cm}$ e $\Delta\ell_{\max} = 11.807\,\text{cm}$.

RISPOSTE VALIDE $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta\ell_0 = 9.81\,\text{cm}\,;\ \Delta\ell_{\max} = 11.8\,\text{cm}}$

Quesito n. 4.

La posizione di equilibrio del corpo di massa m_1 è quella in cui l'allungamento della molla è

$$\Delta\ell_1 = \frac{m_1g}{k} < \Delta\ell_0\,.$$

Il corpo compie un'oscillazione armonica attorno a questa posizione, di ampiezza $A' = \Delta\ell_0 - \Delta\ell_1$. L'allungamento minimo è dunque

$$\Delta\ell_{\min} = \Delta\ell_1 - A' = 2\Delta\ell_1 - \Delta\ell_0 = 2\frac{m_1g}{k} - \frac{Mg}{k} = \frac{g}{k}(2m_1 - M)\,.$$

La molla risulta compressa in alcune fasi dell'oscillazione se $\Delta\ell_{\min} < 0$, dunque se $m_1 < \dfrac{1}{2}M$.

Soluzione alternativa

Fissando un riferimento come prima, l'energia del sistema in una posizione generica è

$$E = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}k\,\Delta\ell^2 - m_1g\,\Delta\ell\,.$$

La molla risulterà compressa in alcune fasi dell'oscillazione solo se il corpo attraversa la posizione in cui $\Delta\ell = 0$. In questa posizione, l'energia è solo cinetica, dunque il corpo può oltrepassarla solo se $E > 0$. Il valore dell'energia può essere valutato nell'istante iniziale, in cui $v = 0$ e $\Delta\ell = \Delta\ell_0 = Mg/k$:

$$E_0 = \frac{1}{2}k\left(\frac{Mg}{k}\right)^2 - m_1g\frac{Mg}{k} = \frac{Mg^2}{k}\left(\frac{M}{2} - m_1\right)\,.$$

Dunque la molla risulta compressa solo se $m_1 < \dfrac{1}{2}M$.

I Campionati di Fisica sono organizzate dall'AIF su mandato del MINISTERO dell'ISTRUZIONE e del MERITO