

Introduzione

Questo problema prende in considerazione la fisica dello strato di ghiaccio della Groenlandia, il secondo più grande ghiacciaio del mondo, Fig. 3.1(a). Per semplicità, la Groenlandia è schematizzata come un'isola rettangolare di ampiezza $2L$ e lunghezza $5L$ con il terreno al livello del mare e completamente ricoperta di ghiaccio non comprimibile (di densità costante ρ_{ice}), vedi Fig. 3.1(b). Il profilo dell'altezza $H(x)$ dello strato di ghiaccio non dipende dalla coordinata y e aumenta da zero sulla costa dove $x = \pm L$ fino ad una massima altezza H_m lungo l'asse centrale nord-sud (l'asse y), noto come il divisore del ghiaccio, vedi Fig. 3.1(c).

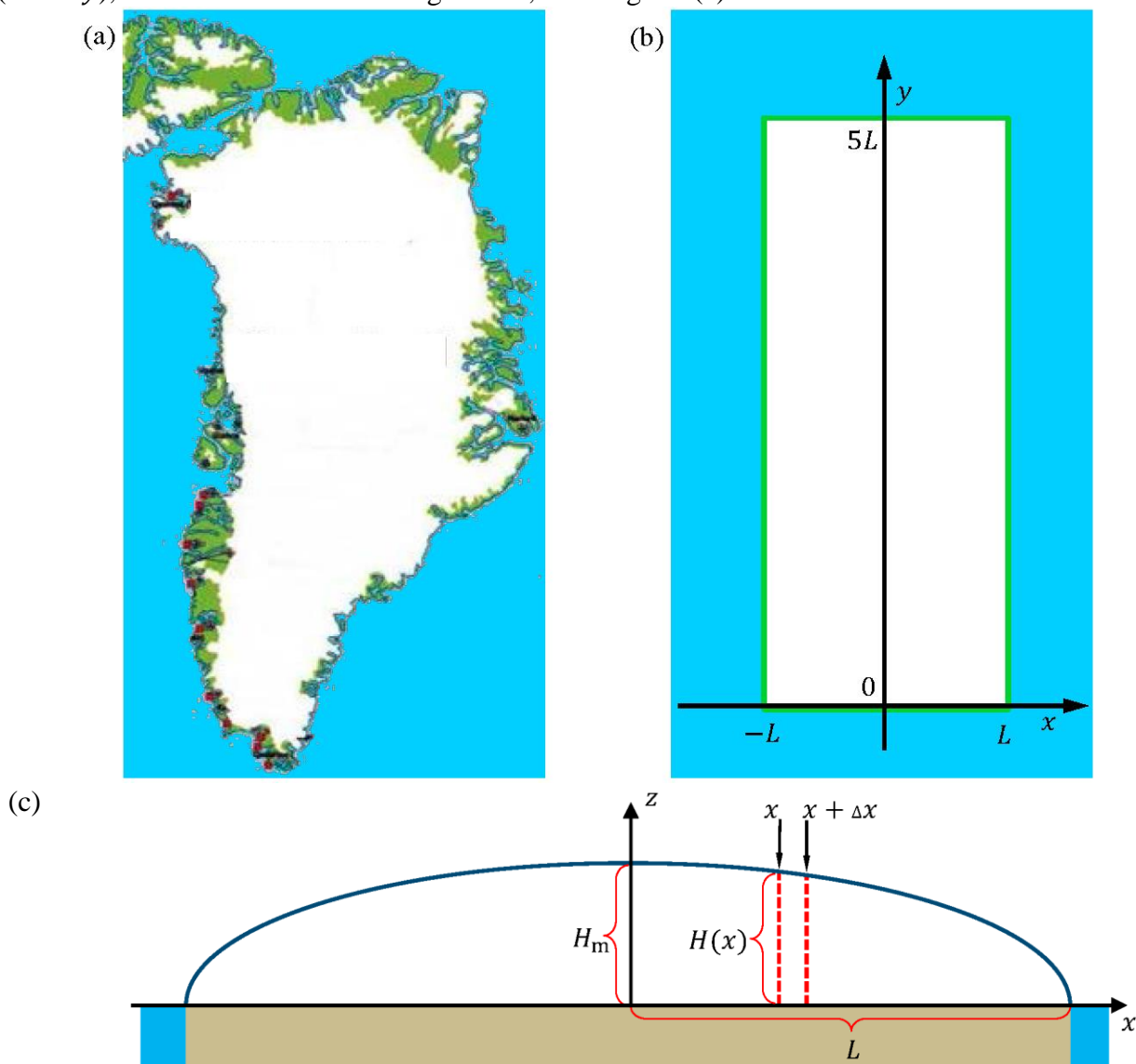


Figura 3.1 (a) Una mappa della Groenlandia che mostra l'estensione dello strato di ghiaccio (bianco), la zona libera da ghiaccio, cioè la regione lungo la costa (verde), e l'oceano circostante (blu). (b) Il modello semplificato dello strato di ghiaccio della Groenlandia che ricopre un'area rettangolare nel piano xy con lati di lunghezza rispettivamente $2L$ e $5L$. Il divisore di ghiaccio, cioè la linea di massima altezza dello strato di ghiaccio H_m si sviluppa lungo l'asse y . (c) Una sezione verticale (nel piano xz) attraverso lo strato di ghiaccio che mostra il profilo dell'altezza $H(x)$ (linea blu). $H(x)$ è indipendente dalla coordinata y per $0 < y < 5L$, mentre scende bruscamente a zero per $y = 0$ e $y = 5L$. L'asse z segna la posizione del divisore di ghiaccio. Per chiarezza della figura, le dimensioni verticali sono aumentate rispetto alle dimensioni orizzontali. La densità ρ_{ice} del ghiaccio è costante.

Due formule utili

In questo problema possiamo utilizzare l'integrale:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3}$$

e l'approssimazione $(1+x)^a \approx 1+ax$, valida per $|ax| \ll 1$.

Il profilo dell'altezza dello strato di ghiaccio

Su brevi scale temporali il ghiacciaio è un sistema idrostatico non comprimibile con uno fissato profilo dell'altezza $H(x)$.

| | | |
|-----|---|-----|
| 3.1 | Scrivi l'espressione della pressione $p(x, z)$ all'interno dello strato del ghiaccio in funzione dell'altezza verticale z sopra al terreno e a distanza x dal divisore del ghiaccio. Trascura la pressione atmosferica. | 0.3 |
|-----|---|-----|

Considera una certa porzione verticale dello strato di ghiaccio in equilibrio, che ricopre una piccola base orizzontale di area $\Delta x \Delta y$ tra x e $x + \Delta x$, come mostrato dalle linee rosse tratteggiate nella Fig. 3.1(c). La dimensione di Δy non è importante. La componente orizzontale della forza risultante ΔF sulle due pareti verticali della porzione, generata dalla differenza di altezza al centro rispetto alla parti periferiche della porzione, è bilanciata dalla forza di attrito $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$ prodotta dal terreno sulla base di area $\Delta x \Delta y$, dove $S_b = 100$ kPa.

| | | |
|------|--|-----|
| 3.2a | Per un fissato valore di x , mostra che nel caso limite $\Delta x \rightarrow 0$, si ha $S_b = kH dH/dx$, e determina k . | 0.9 |
| 3.2b | Determina un'espressione per il profilo dell'altezza $H(x)$ in funzione di ρ_{ice} , g , L , S_b e la distanza x dal divisore di ghiaccio. Il risultato mostrerà che la massima altezza del ghiacciaio H_m dipende dalla semi ampiezza L come $H_m \propto L^{1/2}$. | 0.8 |
| 3.2c | Determina l'esponente γ con cui il volume totale V_{ice} dello strato di ghiaccio dipende dall'area A dell'isola rettangolare, $V_{ice} \propto A^\gamma$. | 0.5 |

Uno strato di ghiaccio dinamico

Su scale temporali più lunghe, il ghiaccio si comporta come un fluido viscoso non comprimibile che per gravità scorre dalla parte centrale verso la costa. In questo modello il profilo dell'altezza $H(x)$ del ghiaccio mantiene uno stato stazionario, nel quale l'accumulo di ghiaccio a causa della neve che cade nella regione centrale è bilanciato dalla fusione lungo la costa. Oltre alla geometria dello strato di ghiaccio di cui alle Fig. 3.1(b) e (c) fai le seguenti ipotesi:

- 1) Il ghiaccio fluisce parallelamente all'asse x allontanandosi dal divisore di ghiaccio (l'asse y).
- 2) Il tasso c (m/anno) di accumulo del ghiaccio nella regione centrale è costante.
- 3) Il ghiaccio può lasciare il ghiacciaio solamente per fusione lungo la costa a $x = \pm L$.
- 4) La componente orizzontale x di $v_x(x) = dx/dt$ della velocità di scorrimento del ghiaccio è indipendente da z .
- 5) La componente verticale z di $v_z(z) = dz/dt$ della velocità di scorrimento del ghiaccio è indipendente da x .

Considera solamente la regione centrale definita da $|x| \ll L$ vicina al centro dello strato di ghiaccio, dove le variazioni d'altezza dello strato di ghiaccio sono molto piccole e possono quindi essere trascurate, cioè $H(x) \approx H_m$.

| | | |
|-----|---|-----|
| 3.3 | Utilizza la conservazione della massa per ricavare un'espressione per la velocità orizzontale di scorrimento del ghiaccio $v_x(x)$ in funzione di c , x e H_m . | 0.6 |
|-----|---|-----|

Dall'ipotesi di non comprimibilità, cioè di densità costante del ghiaccio ρ_{ice} , segue che la conservazione della massa implica la seguente restrizione sulle componenti della velocità di scorrimento del ghiaccio

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

| | | |
|-----|--|-----|
| 3.4 | Scrivi un'espressione per la dipendenza da z della componente verticale $v_z(z)$ della velocità di scorrimento del ghiaccio. | 0.6 |
|-----|--|-----|

Una piccola particella di ghiaccio con la posizione iniziale sulla superficie (x_i, H_m) scorrerà, al trascorrere del tempo, come una parte dello strato di ghiaccio lungo una traiettoria di scorrimento $z(x)$ nel piano verticale xz .

| | | |
|-----|---|-----|
| 3.5 | Ricava un'espressione per la traiettoria di tale scorrimento $z(x)$. | 0.9 |
|-----|---|-----|

Indicatori dell'età e del clima nello strato dinamico di ghiaccio

Sulla base delle componenti della velocità di scorrimento $v_x(x)$ e $v_z(z)$ dello strato di ghiaccio, è possibile stimare l'età $\tau(z)$ del ghiaccio ad una specifica profondità $H_m - z$ dalla superficie dello strato di ghiaccio.

| | | |
|-----|--|-----|
| 3.6 | Scrivi una espressione per l'età $\tau(z)$ del ghiaccio in funzione dell'altezza z rispetto al terreno, esattamente al divisore del ghiaccio $x = 0$. | 1.0 |
|-----|--|-----|

Il carotaggio di un campione nell'interno dello strato di ghiaccio della Groenlandia penetrerà attraverso strati di neve del passato e il campione può essere analizzato per rivelare cambiamenti climatici del passato. Uno dei migliori indicatori è il cosiddetto $\delta^{18}O$, definito come

$$\delta^{18}O = \frac{R_{ice} - R_{ref}}{R_{ref}} 1000 \text{ ‰},$$

dove $R = [^{18}O]/[^{16}O]$ indica l'abbondanza relativa dei due isotopi stabili ^{18}O e ^{16}O dell'ossigeno. Il riferimento R_{ref} è basato sulla composizione isotopica degli oceani attorno all'Equatore.

Osservazioni dello strato di ghiaccio della Groenlandia mostrano che $\delta^{18}O$ nella neve varia approssimativamente linearmente con la temperatura, Fig. 3.2(a). Assumendo che questo si sia sempre verificato, $\delta^{18}O$ derivato dal campione carotato alla profondità $H_m - z$ porta ad una stima della temperatura T della Groenlandia all'epoca $\tau(z)$.

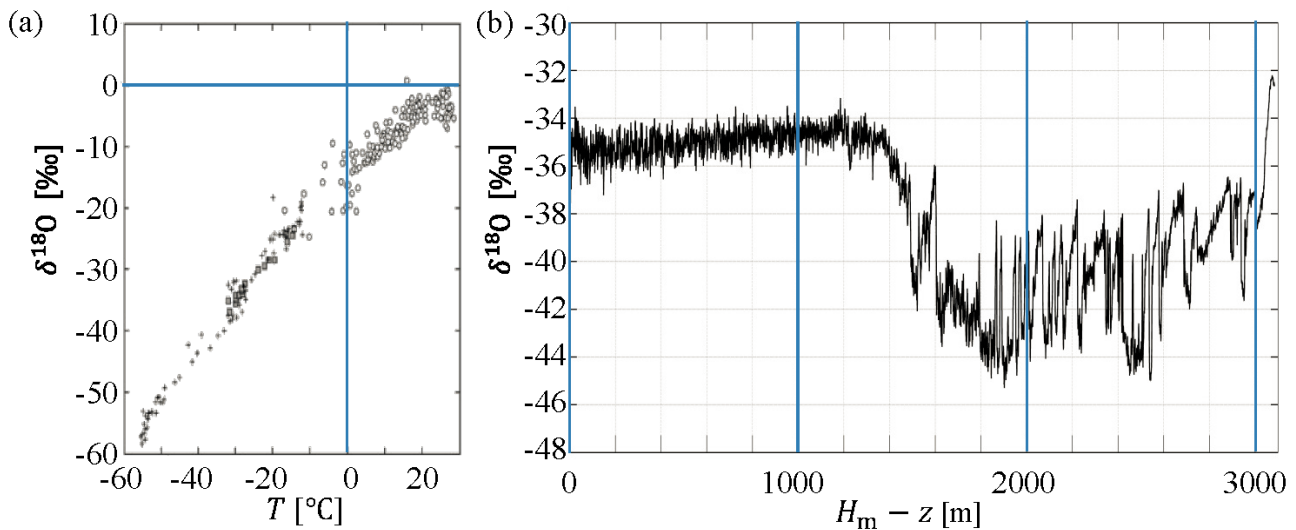


Figure 3.2 (a) Relazione osservata tra $\delta^{18}\text{O}$ nella neve in funzione della temperatura media annuale T alla superficie. (b) Misure di $\delta^{18}\text{O}$ in funzione della profondità $H_m - z$ dalla superficie presa da un nucleo di ghiaccio carotato dalla superficie fino al letto di roccia in un punto specifico lungo il divisore di ghiaccio della Groenlandia dove $H_m = 3060$ m.

Misure di $\delta^{18}\text{O}$ in un nucleo di ghiaccio della Groenlandia lungo 3060 m mostrano un brusco cambiamento di $\delta^{18}\text{O}$ ad una profondità di 1492 m, Fig. 3.2(b), segnalando la fine dell'ultima glaciazione. La glaciazione cominciò 120000 anni fa, corrispondenti ad una profondità di 3040 m, e l'attuale epoca interglaciale cominciò 11700 anni fa, in corrispondenza di una profondità di 1492 m. Assumi che questi due periodi possano essere descritti rispettivamente da due differenti tassi di accumulazione, c_{ia} (età del ghiaccio "ice age") e c_{ig} (età dell'interglaciale "interglacial age"). Puoi assumere che H_m rimanga costante durante questi 120000 anni.

| | | |
|------|---|-----|
| 3.7a | Determina i tassi di accumulazione c_{ia} e c_{ig} . | 0.8 |
| 3.7b | Utilizzando i dati in Fig. 3.2 trova la variazione di temperatura durante la transizione dalla età del ghiaccio all'interglaciazione. | 0.2 |

Innalzamento del livello del mare a causa dello scioglimento dello strato di ghiaccio della Groenlandia

Una fusione completa dello strato di ghiaccio della Groenlandia causerebbe un innalzamento dei livelli in tutto l'oceano. Per una stima rozza dell'innalzamento dei livelli dei mari si può considerare un innalzamento uniforme in tutto l'oceano di area costante $A_o = 3.61 \times 10^{14} \text{m}^2$.

| | | |
|-----|--|-----|
| 3.8 | Calcola l'innalzamento medio globale del livello dei mari che risulterebbe dalla fusione completa dello strato di ghiaccio della Groenlandia, data la sua attuale area $A_G = 1.71 \times 10^{12} \text{m}^2$ e $S_b = 100 \text{kPa}$. | 0.6 |
|-----|--|-----|

Il massiccio strato di ghiaccio della Groenlandia esercita un'attrazione gravitazionale sui circostanti oceani. Se lo strato di ghiaccio fondesse questo innalzamento locale verrebbe a mancare e il livello del mare si abbasserebbe vicino alla Groenlandia, un effetto che in parte bilancerebbe l'innalzamento dei mari calcolato sopra.

Per stimare la grandezza dell'attrazione gravitazionale sull'acqua, lo strato di ghiaccio della Groenlandia è ora modellizzato come un punto di massa, localizzato a livello del suolo avente una massa pari a quella dello strato di ghiaccio della Groenlandia. Copenhagen dista 3500 km lungo la superficie della Terra dal centro della palla di ghiaccio. Possiamo considerare la Terra, senza la palla di ghiaccio, avere simmetria sferica e un oceano globale diffuso su tutta la superficie della Terra pari a $A_E = 5.10 \times 10^{14} \text{m}^2$. Tutti gli effetti legati alla rotazione della Terra possono essere trascurati.

| | | |
|-----|--|-----|
| 3.9 | Con questo modello, determina la differenza $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}}$ tra i livelli del mare a Copenhagen (h_{CPH}) e in un punto diametralmente opposto alla Groenlandia (h_{OPP}). | 1.8 |
|-----|--|-----|