Associazione per l'Insegnamento della Fisica

Progetto Olimpiadi

OLIMPIADI DI FISICA 2005

Senigallia – 7 Aprile 2005

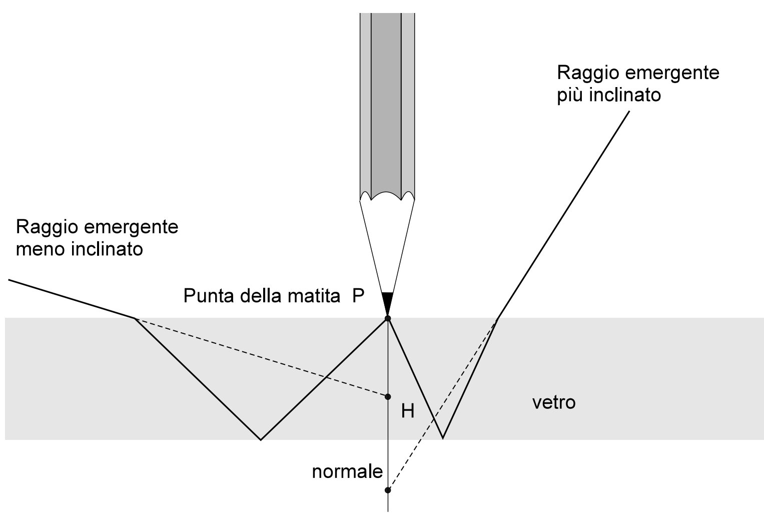
Gara Nazionale: SOLUZIONE della Pr. Sperimentale

Quesito n. 1. – Posizione della superficie riflettente.

Guardando lo specchio si capisce facilmente come è fatto: la superficie riflettente si trova sotto uno strato di vetro, e una vernice protegge la faccia posteriore alluminata. Lo si può anche capire osservando che c'è una certa distanza tra un oggetto appoggiato sullo specchio e la sua immagine. La prima domanda serve anche per far riflettere e interpretare l'osservazione circa la distanza tra la punta della matita e la sua immagine.

Se si pone la punta della matita a contatto con lo specchio, si nota che la distanza tra la punta e la sua immagine diminuisce fino ad annullarsi, a mano a mano che ci si abbassa nell'osservare. Il fatto si può spiegare con la rifrazione della luce nel passaggio dal vetro all'aria dopo essere stata riflessa dallo specchio. Supponendo che lo specchio sia piano intorno alla punta, come suggerito nel testo, si può rappresentare il percorso dei raggi che dalla punta entrano direttamente nel vetro. I prolungamenti dei raggi che emergono più inclinati, incontrano la normale n allo specchio passante per la punta per P, in posizioni più vicine a P. Nella figura, per semplicità, si considera per ciascuna delle due inclinazioni un solo raggio emergente ed il suo punto d'incontro con la normale, in sostituzione del fascetto conico. Questo avrebbe il vertice sulla normale, all'incirca, dato che l'immagine, nitida alle varie direzioni di osservazione, è situata sotto la punta e non presenta notevoli deformazioni.

Va detto inoltre che una parte del fenomeno può essere interpretato anche in un'altra maniera: quando l'occhio dell'osservatore si abbassa molto, la luce riflessa dalla superficie superiore si sovrappone a quella che proviene dalla superficie inferiore, poiché con luce radente l'intensità della luce riflessa aumenta di molto. In effetti, è proprio per questo che noi possiamo scorgere in maniera nitida l'immagine del sole riflessa sul mare solo quando esso è molto basso sull'orizzonte, e non certo attorno al mezzogiorno.



Per una risposta più approfondita, sempre nell'ipotesi di specchio piano, si può ricavare l'espressione della distanza h tra la punta P e l'intersezione H del raggio emergente (nell'aria) con la normale allo specchio, in funzione dell'inclinazione dei raggi. Applicando le leggi della riflessione, della rifrazione e la trigonometria, da

$$\operatorname{sen} i / \operatorname{sen} r = 1/n$$

si ottiene:

$$h = \frac{2d}{n}\left[\frac{1-n^2\operatorname{sen}^2 i}{1-\operatorname{sen}^2 i}\right]^{1/2} \quad \text{oppure} \quad h = 2d\left[\frac{1-\operatorname{sen}^2 r}{n^2-\operatorname{sen}^2 r}\right]^{1/2}$$

dove d è lo spessore del vetro, i è l'angolo di incidenza nel vetro, r è l'angolo di rifrazione nell'aria, n è l'indice di rifrazione del vetro rispetto all'aria.

Dalla formula si ricava anche la distanza tra punta e immagine se si guarda in direzione normale: per $i = 0$, $h = 2d/n$. La distanza si annulla quando i è l'angolo limite ($\operatorname{sen} i = 1/n,\ \operatorname{sen} r = 1$) e il raggio emerge a $90°$ con la normale.

Non si pretende una risposta quantitativa dai ragazzi (v. griglia per la valutazione).

Quesito n. 2. Raggio di curvatura dello specchio.

Le misure dei raggi di curvatura dei due specchi (SP1, SP2) ottenute con uno sferometo da laboratorio sono rispettivamente:

Raggio dello SP1 $R_1 = (0.771 \pm 0.006)\,\mathrm{m}$ $[\pm 0.8\,\%]$

Raggio dello SP2 $R_2 = (0.394 \pm 0.006)\,\mathrm{m}$ $[\pm 1.5\,\%]$

2.1 Raggio di una calotta sferica.

Dalla formula $a = a\,(R, h)$ fornita nel testo, si ricava $R = a^2/(2h) + h/2$.

Il diametro $2a$ vale 135 mm come è anche indicato sulla scatolina dello specchio. Per determinare la freccia h, si può utilizzare, a mo' di sferometro, la vite (diametro 3 mm) munita di dado, infilata nel foro della cannuccia, dopo aver ricavato di quanto si sposta l'estremità della vite per ogni suo giro.

Per contare i giri è comodo segnare con il pennarello indelebile una punta della croce sulla testa della vite. Si può apprezzare il quarto di giro.

Taratura: (prova 1) 25 mm : 50 giri (prova 2) 26 mm : 51.5 giri
da cui $(0.50 \pm 0.01)\,\mathrm{mm/giro}$

Per misurare h, è necessario che la cannuccia sia disposta secondo un diametro del cerchio di base e che la vite sia sopra il vertice dello specchio; per posizionarle bene, ci si può aiutare segnando a pennarello sulla cannuccia due punti a una distanza pari ad $a = 67.5\,\mathrm{mm}$ dal centro della vite. È importante tenere bloccato con le dita il dado sopra la cannuccia, mentre si contano i giri della vite, finché questa tocca lo specchio. Si controlla a occhio la perpendicolarità tra vite e cannuccia. È consigliabile ripetere la misurazione con la vite infilata dall'altra parte del foro nella cannuccia. Le misure della freccia con questo sistema saranno in difetto, dato che la vite tocca un po' prima del dovuto la superficie dello specchio, poiché il suo diametro è di 3 mm. Il conseguente errore in difetto su h risulta trascurabile per entrambi gli specchi: 0.001 mm per lo specchio 1, e 0.003 mm per lo specchio 2. (Dalla formula $a = a\,(R, h)$ si ricava per $h \ll a$ una relazione di proporzionalità diretta tra h e a^2 : $a^2 \approx 2Rh$.)

Tabella 1

$a = (67.5 \pm 0.5)\,\mathrm{mm}$	Numero di giri	Freccia h (mm)	valore non arrotondato	Raggio R (m)	$\delta R/R = 2\delta a/a + \delta h/h$
SP1	5.50 ± 0.25	2.8 ± 0.1	2.751	0.83 ± 0.04	$[\pm 5\,\%]$
SP2	11.25 ± 0.25	5.6 ± 0.1	5.628	0.41 ± 0.01	$[\pm 3\,\%]$

Dalle misure dei raggi con lo sferometro risulta:

$h_1 = (2.96 \pm 0.02)\,\mathrm{mm},\ h_2 = (5.8 \pm 0.1)\,\mathrm{mm}$.

Fonti d'errore: larghezza della vite (errore in difetto per h, in eccesso per R); vite obliqua (errore in eccesso per h, in difetto per R. Imbarcamento della cannuccia (errore in difetto o in eccesso per h).

Accorgimenti: rovesciare la vite nella cannuccia e ripetere la misura di h.

2.2 Volume di un segmento sferico.

Si versa dal cilindro graduato acqua preventivamente addizionata di detersivo fino al bordo della calotta sferica e si determina il volume del liquido versato. Il detersivo serve per diminuire la tensione superficiale τ, e quindi l'errore provocato dal menisco del liquido.

Dalla formula $V = V\,(R, h)$ fornita nel testo, si ricava $R = V/(\pi h^2) + h/3$. Sostituendo ad h il valore misurato con cannuccia e vite, si ottengono i seguenti risultati:

Tabella 2

	Raggio di base a (mm)	Freccia h (mm)	ottenuta con vite e cannuccia	Volume V (cm^3) ($\times 10^3$ mm^3)	Raggio R (m) ($\delta R/R = 2\delta h/h + \delta V/V$)
SP1	67.5	2.8 ± 0.1	2.751	20 ± 1 ([$\pm 5\,\%$])	0.8 ± 0.1 ([$\pm 12\,\%$])
SP2	67.5	5.6 ± 0.1	5.628	40 ± 1 ([$\pm 2.5\,\%$])	0.40 ± 0.02 ([$\pm 6\,\%$])

Fonti d'errore: menisco convesso $\rightarrow$ errore in eccesso per V e per R;
freccia h in eccesso $\rightarrow$ errore in difetto per R.

L'incertezza di h influisce molto sull'incertezza di R, dato che h compare al quadrato nella formula di R.

Per ridurre l'incertezza di R, facendola dipendere solo da quella del volume V, si può ricavare la freccia h dalla relazione $V = V\,(a, h)$ fornita nel testo, nonostante questa sia un'equazione di terzo grado nell'incognita h. L'ostacolo della sua risoluzione si può aggirare così: si ha già un'idea del valore di h, valutabile a occhio o dalla precedente misura con la vite; si calcola V con questo valore, e poi con approssimazioni successive si varia h fino ad ottenere il valore di V misurato. Con la calcolatrice a disposizione, è più veloce a farsi che a dirsi. Bastano cinque o sei tentativi mirati per trovare per h un valore con quattro o cinque cifre:

SP1: $h = 2.7925\,\mathrm{mm} \rightarrow V = 19.997\,\mathrm{cm}^3 \rightarrow R = 81.73\,\mathrm{cm}$ [$\pm 5\,\%$] $\quad R = (0.82 \pm 0.04)\,\mathrm{m}$ $(dR/R = dV/V)$

SP2: $h = 5.576\,\mathrm{mm} \rightarrow V = 39.998\,\mathrm{cm}^3 \rightarrow R = 41.14\,\mathrm{cm}$ [$\pm 2.5\,\%$] $\quad R = (0.41 \pm 0.01)\,\mathrm{m}$ $(dR/R = dV/V)$

2.3 Immagini e distanze.

2.3 a] Raggio e distanza focale. $R = 2f$.

Si mette a fuoco su un foglio di carta l'immagine capovolta del panorama dalla finestra, si misura la distanza tra lo specchio e il foglio che è pari alla distanza focale f, poi si tiene conto che $R = 2f$. Si può anche determinare per parallasse la posizione dell'immagine di oggetti molto lontani, facendola coincidere con un righello verticale davanti allo specchio, oppure la si può localizzare col metodo dei raggi di visuale.

Tabella 3

SP1	Panorama: $R = 0.74 \pm 0.03\,\mathrm{m}$ [$\pm 4\,\%$]	Parallasse: $R = 0.79 \pm 0.05\,\mathrm{m}$ [$\pm 6\,\%$]
SP2	Panorama: $R = 0.36 \pm 0.03\,\mathrm{m}$ [$\pm 8\,\%$]	Parallasse: $R = 0.38 \pm 0.05\,\mathrm{m}$ [$\pm 13\,\%$]

2.3 b] Formula dei punti coniugati.

Dalla $1/p + 1/q = 1/f$ e dalla $R = 2f$ si ricava $R = 2pq/(p+q)$.

Le misure in tabella sono state ottenute proiettando sul soffitto l'immagine di un rettangolino di nastro isolante nero posto sul vetro di una torcia elettrica, con lo specchio (orizzontale) su piani a livelli diversi, per es. sul tavolo, su uno sgabello, su una sedia. Con un metro di carta attaccato alla torcia si misura p, mentre q si trova facilmente, nota la distanza tra soffitto e pavimento; quest'ultima viene data, mentre le diverse quote a cui viene posto lo specchio devono essere misurate dai ragazzi.

Tabella 4

	p (cm)	q (cm)	R (m) *$\delta R/R = \delta p/p + $ $+ \delta q/q + (\delta p + \delta q)/(p+q)$		p (cm)	q (cm)	R (m)
SP1	49 ± 1	193 ± 1	0.78 ± 0.03 [$\pm 4\,\%$]	Lente	34 ± 1	193 ± 1	0.76 ± 0.03
	46 ± 1	214 ± 1	0.76 ± 0.03	d'acqua			[$\pm 4\,\%$]
	44 ± 1	234 ± 1	0.74 ± 0.03	con SP1			
SP2	22 ± 1	193 ± 1	0.39 ± 0.02 [$\pm 5\,\%$]	Lente	15 ± 1	193 ± 1	0.37 ± 0.02
	21 ± 1	214 ± 1	0.38 ± 0.02	d'acqua			[$\pm 5\,\%$]
	20 ± 1	234 ± 1	0.37 ± 0.02	con SP2			

* L'incertezza di R è stata calcolata con la formula frequentemente usata dai ragazzi per le misure indirette, che in questo caso dà un valore sbagliato in eccesso. Con la semidispersione, più correttamente, si ottiene:

$\delta R_1 = \pm 0.02\,\mathrm{m}$ [$\pm 3\,\%$] , $\delta R_2 = \pm 0.01\,\mathrm{m}$ [$\pm 3\,\%$]

2.4 Lente d'acqua

Con un po' d'acqua (indice di rifrazione $n = 1.33$) contenuta nello specchio disposto orizzontalmente, si ottiene una lente convergente piano–convessa. La formula dell'ottico

$$1/f_{\text{lente}} = (n-1)(1/r_1 - 1/r_2)\,,$$

fornisce per questa lente una convergenza positiva $1/f_{\text{lente}} = 0.33/R$, dato che il raggio della faccia piana è infinito, e il raggio della faccia convessa è pari a R. Si segue la stessa procedura descritta sopra (punti coniugati), ma ora il sistema ottico è costituito da: lente + specchio + lente, e le tre convergenze si sommano tra loro per dare la convergenza totale $1/f_{\text{t}}$ del sistema, misurabile attraverso la $f_{\text{t}} = pq/(p+q)$.

Dalle formule:

$$1/f_{\text{t}} = 1/f_{\text{lente}} + 1/f_{\text{specchio}} + 1/f_{\text{lente}}\,,$$

$$1/f_{\text{t}} = 0.33/R + 2/R + 0.33/R = 2.66/R \quad \Rightarrow \quad R = 2.66 f_{\text{t}}\,,$$

si ricava $R = 2.66\,pq/(p+q)$.

Fonti d'errore (2.3 b e 2.4): Incertezza nello scegliere la migliore focalizzazione dell'immagine sul soffitto → incertezza nel valore di p. Sia l'equazione dei punti coniugati che la formula dell'ottico sono valide per i raggi parassiali. I due specchi, in modo più accentuato lo specchio 2, con acqua o senza, dovrebbero dare immagini un po' sfocate per l'aberrazione di sfericità, ma la cosa non si nota: il rettangolino appare con il contorno netto.

Quesito n. 3. Sincronismo e periodo.

Per controllare il sincronismo delle oscillazioni della sferetta sullo specchio si possono confrontare i periodi ricavati dai tempi impiegati per numeri di oscillazioni significativamente diversi, oppure misurare i periodi di oscillazioni di maggiore e di minore ampiezza.

Tabella 5

	n. oscillazioni	Periodo T $\pm$ semidisp.(s)	n. oscillazioni	Periodo T $\pm$ semidisp.(s)
SP1	8	2.070 ± 0.008	4 (piccole)	2.08 ± 0.03
Sferetta piccola $\varnothing$ 12.7 mm	4	2.07 ± 0.02	4 (grandi)	2.08 ± 0.03
SP1	10	2.061 ± 0.007	5 (piccole)	2.05 ± 0.01
Sferetta grande $\varnothing$ 15.2 mm	5	2.071 ± 0.002	5 (grandi)	2.07 ± 0.01
SP2	12	1.48 ± 0.01	5 (piccole)	1.49 ± 0.01
Sferetta piccola $\varnothing$ 12.7 mm	8	1.48 ± 0.02		
	6	1.48 ± 0.02	5 (grandi)	1.49 ± 0.01

Le misure dei periodi relativi allo specchio 1 risultano contenute nella fascia (2.07 ± 0.02) s ($[\pm 1\,\%]$), quelle relative allo specchio 2 nella fascia (1.48 ± 0.02) s ($[\pm 1.4\,\%]$). Aumentando un po' l'incertezza, per entrambi gli specchi le oscillazioni si possono considerare sincrone entro il 2 %.

Misure accettabili: $T_1 = 2.07 \pm 0.04$ s ($[\pm 2\,\%]$) $T_2 = 1.48 \pm 0.03$ s ($[\pm 2\,\%]$)

Note. Sembra che il periodo tenda a diminuire con l'ampiezza. I risultati per lo specchio 2 sono più vicini tra loro, perché l'attrito si fa sentire di meno, nonostante le oscillazioni "grandi" abbiano un'apertura di circa 20°, doppia di quella dello specchio 1.

Fonti d'errore: irregolarità dell'attrito, più accentuata per sferetta piccola su SP1→ traiettorie ellittiche.

Accorgimenti: fare un segno a pennarello sullo specchio come riferimento per contare le oscillazioni.

Quesito n. 4. Confronto con pendolo semplice.

Un pendolo semplice che percorra la stessa traiettoria del centro della sferetta, deve avere una lunghezza $l' = R - r$, dove R è il raggio dello specchio, r è il raggio della sferetta. Il contributo di r riguarda solo la quarta cifra di T', quindi non importa se r sarà determinato con una sola cifra significativa. Il periodo T' di tale pendolo, calcolato con la formula $T' = 2\pi\sqrt{(R-r)/g}$, risulta minore del periodo T della sferetta misurato al punto 3.

Tabella 6

	R (m) (mis. max.)	r (m)	$T' \pm (1/2\delta R/R)T'$(s) (mis. max.)	T (s)
SP1	0.83 ± 0.05	0.00635; 0.00760	1.82 ± 0.05	2.07 ± 0.04
SP2	0.41 ± 0.05	0.00635	1.28 ± 0.08	1.48 ± 0.03

Le misure di T' e T risultano incompatibili, anche se per determinare T' si è scelto per R il valore massimo tra quelli con due cifre significative (v. punto 2) e se ne è maggiorata l'incertezza. Le misure dei due periodi possono risultare compatibili se R ha un errore in eccesso pari a circa 30 %. Dalle misure dei raggi con lo sferometro, si ricava: $T'_1 = 1.753 \pm 0.007\,\mathrm{s}$ (sferetta grande); $T'_1 = 1.754 \pm 0.007\,\mathrm{s}$ (sferetta piccola); $T'_2 = 1.25 \pm 0.01\,\mathrm{s}$.

Il fatto che il tempo impiegato dal pendolo per n oscillazioni sia minore del corrispondente tempo impiegato dalla sferetta che oscilla sullo specchio, si può comprendere tenendo presente la diversa inerzia della sferetta nei due casi. Essenziale è una buona comprensione del significato della II legge della dinamica, da parte degli studenti. Nel caso del rotolamento sullo specchio l'energia potenziale posseduta inizialmente dalla sferetta si trasforma sia in energia cinetica del suo centro di massa, che è una "quasi traslazione", sia in energia di rotazione attorno al centro di massa della sferetta che rotola. In altre parole, la sferetta di cui sopra ha due "tipi di inerzia", mentre la sferetta appesa al filo possiede solo inerzia alla "quasi traslazione". E poiché le traiettorie del centro della sferetta sono uguali in entrambi i casi, e pendolo e sferetta sono fermi alle due estremità, significa che il lavoro della forza esterna è uguale in entrambi i casi. Si noti che la forza peso della sferetta ha un momento rispetto al punto di contatto della sferetta con lo specchio che varia a seconda del punto in cui si trova la sferetta (specchio come piano inclinato a pendenza variabile). Quest'ultima osservazione serve anche per intuire come si ricava l'equazione del moto della sferetta. Allo scopo, si può applicare il teorema del momento della quantità di moto, teorema che formalmente può essere ricavato dalla II legge della dinamica applicata alle rotazioni, come è stato fatto qui appresso, considerando il momento delle forza, il momento d'inerzia e l'accelerazione angolare della sferetta come indicato qui appresso:

(Momento d'inerzia sferetta) $\times$ (accelerazione ang.) $=$ (Momento della forza esterna),

$$M(r^2 + \delta^2)\,\frac{R-r}{r}\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mg\,r\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

I simboli hanno il seguente significato: M, r, $\delta =$ rispettivamente massa, raggio, raggio di girazione della sferetta; $R =$ raggio di curvatura dello specchio; $f =$ angolo di oscillazione della sferetta; $g =$ accelerazione di gravità.

Facciamo notare infine che il notevole attrito contro lo specchio non comporta una variazione sensibile del tempo totale relativo alle n oscillazioni, poiché entro l'errore sperimentale esiste l'isocronismo, anche se l'ampiezza si riduce notevolmente.

Quesito n. 5. Relazione tra periodo e raggio.

Le relazioni (1) e (2), fornite nel testo, si ricavano dall'espressione dell'energia cinetica E di una sferetta di raggio r e di massa m che rotola senza slittare su un arco di circonferenza di una superficie sferica di raggio R.

Applicando il teorema di König si ottiene:

$$E = \frac{1}{2}m(R-r)^2\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}m(R-r)^2\omega^2$$

dove ω indica la velocità angolare del moto di oscillazione del centro della sferetta.

Il primo termine $E_1 = {}^1\!/_2\, m(R-r)^2\omega^2$ esprime l'energia cinetica del centro di massa, il secondo $E_2 = {}^1\!/_2\, {}^2\!/_5\, m(R-r)^2\omega^2$ esprime l'energia cinetica di rotazione attorno al centro. (La velocità angolare del moto di rotazione ω' e quella di oscillazione ω sono legate dalla relazione: $\omega' = \omega(R-r)/r$).

(Per una trattazione del problema, si rimanda a un qualsiasi libro di Esercizi di Meccanica Razionale, ad es. D. Graffi, R. Patron Editore, Bologna 1947)

Senza dover ricorrere all'espressione dell'energia cinetica, né tanto meno all'equazione del moto, si può arrivare alla formula che lega periodo di oscillazione T e raggio R dello specchio, con un ragionamento come il seguente basato sulle relazioni (1) e (2) fornite nel testo.

Se la pallina scivolasse avanti e indietro senza attrito e senza ruotare, il suo centro si muoverebbe come un pendolo semplice di lunghezza pari a $R - r$ e di periodo

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{R-r}{g}}$$

e la sua energia potenziale gravitazionale si trasformerebbe lungo la traiettoria in energia cinetica del solo moto di oscillazione E_1', che rappresenterebbe da sola l'energia cinetica totale E. In questo caso $E = E_1'$.

Ma per la pallina c'è anche il moto di rotazione attorno al centro di massa a cui spetta una parte (E_2) dell'energia cinetica complessiva. Dalla (1) e (2) del testo si ricava che, in ogni punto della traiettoria, $E_1 = {}^5\!/_7 E$, cioè che l'energia cinetica legata al solo moto di oscillazione della sferetta è solo i $5/7$ dell'energia cinetica totale, quella che spetterebbe tutta intera al moto di oscillazione del pendolo semplice che descrivesse la stessa traiettoria.

Dalla relazione $E_1 = {}^5\!/_7\, E$ si ricava

$$v^2_{\text{sferetta}} = {}^5\!/_7\, V^2_{\text{pendolo}} \quad \text{ed anche} \quad v_{\text{sferetta}} = \sqrt{5/7}\, V_{\text{pendolo}}$$

Da questa relazione, che vale per ogni punto della traiettoria, si ricava in modo intuitivo, pensando al legame tra tempo e velocità a parità di spazio percorso, oppure con una semplice integrazione grafica, la seguente formula per T che è il periodo del moto oscillatorio della sferetta

$$T = \sqrt{\frac{5}{7}}\, T' \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{5}{7}\,\frac{R-r}{g}} \quad \text{da cui} \quad R = \frac{5}{7}\,\frac{T^2}{4\pi^2}\, g + r$$

Tabella 7

	Periodo T (s)	Raggio R (m) $\pm 2(\delta T/T)R$
SP1 - Sferetta piccola ∅ 12.7 mm SP1 - Sferetta grande ∅ 15.2 mm	2.07 ± 0.04 [± 2 %]	0.77 ± 0.03 [± 4 %]
SP2 - Sferetta piccola ∅ 12.7 mm	1.48 ± 0.03 [± 2 %]	0.40 ± 0.01 [± 4 %]

La Gara Nazionale è realizzata con il sostegno di

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Comune di Senigallia

Liceo Scientifico "E. Medi" di Senigallia

Zanichelli editore

Materiale prodotto dal gruppo

PROGETTO OLIMPIADI

Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica

presso Liceo Scientifico "U. Morin"

VENEZIA MESTRE

fax: 041.584.1272

e-mail: olifis@libero.it