Associazione per l'Insegnamento della Fisica
Progetto Olimpiadi

OLIMPIADI DI FISICA 2005

Senigallia – 8 Aprile 2005

Gara Nazionale: SOLUZIONE della Prova Teorica

PROBLEMA n. 1 – Trittico lunare

100 Punti

A Al chiaro di Luna...

La potenza luminosa della luce solare raccolta dalla Luna (o dalla Terra, che si trova all'incirca alla stessa distanza) è data da

$$W_\mathrm{L} = \Phi_\mathrm{S}\pi r^2$$

essendo Φ_S il flusso della radiazione solare alla distanza tra Sole e sistema Terra-Luna ed r il raggio della Luna.

La potenza irradiata dalla Luna sarà allora $K\,W_\mathrm{L}$ e il flusso di luce diffusa che raggiunge la Terra, nell'ipotesi di diffusione isotropa, è

$$\Phi_\mathrm{L} = \frac{KW_L}{2\pi d^2} = \frac{K\Phi_\mathrm{S}}{2\pi d^2}\,\pi r^2$$

essendo d la distanza Terra-Luna.

La differenza delle magnitudini di Sole e Luna piena è

$$\Delta m = m_\mathrm{S} - m_\mathrm{L} = 2.5\log\frac{\Phi_\mathrm{L}}{\Phi_\mathrm{S}} = 2.5\log\frac{Kr^2}{2\,d^2} = 2.5\log\frac{K(\delta/2)^2}{2} \qquad\Rightarrow\qquad K = \frac{8}{\delta^2}\,10^{(0.4\,\Delta m)} = 0.23$$

avendo espresso in radianti il diametro angolare della Luna: $\delta = 9.3\times 10^{-3}\,\mathrm{rad}$.

NOTA: L'ipotesi di isotropia della luce diffusa dalla Luna, introdotta allo scopo di semplificare il problema, è di fatto decisamente scorretta; come conseguenza di ciò il coefficiente K così ottenuto risulta sovrastimato di un fattore circa 4.

B L'orbita lunare

Quesito n. 1.

Si consideri in ogni caso un istante in cui il satellite è sulla congiungente Sole–pianeta e compreso tra questi. In entrambi i casi rappresentati in figura nel testo la traiettoria presenta una curvatura rivolta verso il pianeta.

Poiché il verso della curvatura della traiettoria coincide con il verso della forza applicata è necessario (e sufficiente) che la forza risultante sia diretta verso il pianeta.

Dette F ed f i moduli delle forze gravitazionali tra Sole e satellite e tra pianeta e satellite deve essere

$$\frac{f}{F} > 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{Gm\,m_\mathrm{sat}}{r^2}\,\frac{R^2}{GM\,m_\mathrm{sat}} = \mu\,\rho^2 > 1$$

L'orbita presenta i "riccioli" se, nel punto considerato, la velocità del satellite rispetto al Sole ha verso opposto a quella del pianeta; poiché tale velocità si ottiene come somma vettoriale della velocità $\vec{v}$ del satellite rispetto al pianeta e di quella, $\vec{V}$, del pianeta rispetto al Sole, la condizione si esprime ponendo $v > V$ ovvero $v/V > 1$.

Identificando la forza gravitazionale con quella centripeta nel moto circolare si ha

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

e la condizione data sopra si esprime come

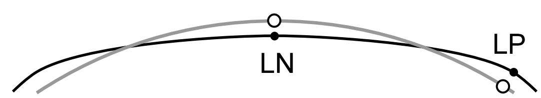
$$\frac{v}{V} = \sqrt{\frac{Gm}{r}}\sqrt{\frac{R}{GM}} = \sqrt{\mu\,\rho} > 1 \quad \Rightarrow \quad \mu\,\rho > 1$$

In tabella sono calcolate le espressioni precedenti ed è indicato il corrispondente tipo di traiettoria: Phobos, Callisto e Titano oscillano attorno ai rispettivi pianeti con movimento di andamento sinusoidale; Io e Mimas orbitano descrivendo i “riccioli”.

Pianeta	μ	Satellite	ρ [10^3]	$\mu\,\rho^2$	$\mu\,\rho$	Traiettoria
Terra	3.04×10^{-6}	Luna	0.385	0.450	1.17×10^{-3}	–
Marte	3.23×10^{-7}	Phobos	24.2	189	7.80×10^{-3}	(a)
Giove	9.52×10^{-4}	Io	1.84	3.24×10^3	1.76	(b)
		Callisto	0.413	162	0.393	(a)
Saturno	2.86×10^{-4}	Mimas	7.69	16.9×10^3	2.20	(b)
		Titano	1.17	389	0.334	(a)

Quesito n. 2.

Dalla tabella appare che per la Luna nessuna delle due condizioni è verificata; l'orbita della Luna presenta dunque la concavità sempre diretta verso il Sole, con raggio di curvatura minimo nella fase di Luna Piena e massimo nella fase di Luna Nuova, come nella figura a fianco.



Notare che, per chiarezza, il rapporto dei raggi delle orbite è molto accentuato rispetto alla realtà.

C Influenza lunare

Quesito n. 1.

Il punto essenziale da considerare è la distinzione tra il centro della Terra e il *centro di massa* del sistema Terra–Luna che, come detto, si muove di moto circolare uniforme; trascurando gli effetti dovuti ad altre cause, il valore medio della durata dell'anno tropico coinciderebbe quindi con il periodo di rivoluzione del *centro di massa*; questo si trova a circa 4600 km di distanza dal centro della Terra, sulla congiungente Terra–Luna, come si ricava facilmente. Infatti in un riferimento con origine nel centro della Terra, dette M ed m le masse di Terra e Luna rispettivamente, il centro di massa T–L si trova calcolando

$$x_\mathrm{G} = \frac{M x_\mathrm{T} + m x_\mathrm{L}}{M+m} = \frac{m}{M+m}\,r = \frac{3.8 \times 10^5\,\mathrm{km}}{82} = 4600\,\mathrm{km} \quad \text{con} \quad x_\mathrm{T} = 0 \text{ e } x_\mathrm{L} = r\,.$$

Al Primo Quarto, Terra e Luna sono allineate con la tangente all'orbita della Terra e il centro della Terra è in anticipo sul centro di massa di circa 2.6 minuti dato che

$$\Delta t = \frac{x_G}{v} = \frac{4600}{30} = 153\,\mathrm{s}$$

Quindi l'equinozio (geocentrico!) avviene 2.6 minuti prima del passaggio del *centro di massa*.

Poiché in un anno ci sono circa 12.5 cicli lunari, il successivo equinozio avviene (approssimativamente) in fase di Ultimo Quarto, guadagnando così altrettanto perché adesso il centro della Terra transita sulla linea del punto gamma dopo il *centro di massa*: l'anno risulta più lungo della media di circa $2\Delta t = 5.2$ minuti.

Quesito n. 2.

Nell'anno successivo gli effetti sono opposti; l'anno è più corto di circa $2\Delta t$ e, detta T_0 la durata media dell'anno tropico, la differenza tra i due anni – a causa della Luna – risulta

$$\Delta T = T_0 + 2\Delta t - (T_0 - 2\Delta t) = 4\Delta t \approx 10.4\,\mathrm{minuti}\,.$$

NOTA: Come detto, ci sono molti altri effetti perturbativi sul moto della Terra, cosicché la durata di anni tropici successivi varia in modo molto più accentuato e irregolare.

PROBLEMA n. 2 – Motore solare

100 Punti

Quesito n. 1.

Poiché si trascurano le aberrazioni, l'immagine solare è semplicemente un disco il cui diametro a è legato a quello della sorgente dal rapporto di ingrandimento dello specchio. La distanza solare è tale da poter assumere che l'immagine si formi alla distanza focale f dello specchio:

$$a = D_{\mathrm{S}} \frac{f}{u} = \frac{D_{\mathrm{S}} R}{2u} \, .$$

Se lo specchio viene mantenuto correttamente orientato, il cilindro deve quindi avere almeno un diametro di base pari ad a. Con i dati forniti, $a = 9.27\,\mathrm{cm}$.

Quesito n. 2.

La radiazione solare investe lo specchio, in direzione ortogonale, secondo un cerchio di diametro d. La potenza in arrivo su quest'area è

$$W_{\mathrm{S}} = S\pi \frac{d^2}{4}$$

e siccome non ci sono perdite per riflessione sullo specchio, questa è anche la potenza ottica sulla base del cilindro. Con i dati forniti, $W_{\mathrm{S}} = 45.2\,\mathrm{kW}$.

Quesito n. 3.

A regime il cilindro costituisce un termostato a temperatura T in equilibrio fra la potenza entrante W_{S} e la potenza uscente, dovuta in parte alle perdite radiative e nella restante parte alla potenza termica W_1 assorbita dalla macchina. Poiché il cilindro è metallico e la sua temperatura è uniforme, la superficie radiante è quella totale. La superficie totale del cilindro equilatero è

$$2\pi \frac{a^2}{4} + \pi a^2 = \frac{3}{2} \pi a^2 \, ,$$

quindi le perdite radiative sono

$$\frac{3}{2} \pi \left(\frac{D_{\mathrm{S}} R}{2u} \right)^2 \sigma T^4 \, .$$

La potenza W_1 si può ricavare calcolando dapprima il rendimento, che è

$$\eta = 0.3 \frac{T - T_0}{T} \, .$$

Se la potenza meccanica è W, allora

$$W_1 = \frac{W}{\eta} = \frac{WT}{0.3\,(T - T_0)} \, .$$

Abbiamo quindi in ultima analisi che

$$\frac{\pi}{4} S d^2 = \frac{3\pi}{8} \frac{D_{\mathrm{S}}^2 R^2 \sigma T^4}{u^2} + \frac{WT}{0.3\,(T - T_0)} \, .$$

Quesito n. 4.

L'equazione precedente può essere esplicitata per ricavare W:

$$W = \frac{0.3\,(T - T_0)\,\pi}{4} \left(\frac{S d^2}{T} - \frac{3 D_{\mathrm{S}}^2 R^2 \sigma T^3}{2u^2} \right)$$

da cui si ricava $W = 4.30\,\mathrm{kW}$.

Quesito n. 5.

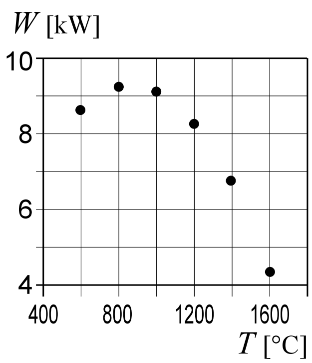
Conviene esprimere la funzione $W(T)$ nella forma più compatta, in questo modo

$$W(T) = \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)\left(\alpha - \beta T^4\right) \quad \text{con} \quad \alpha = 13.572\,\text{kW}, \quad \beta = 6.8832 \times 10^{-13}\,\text{kW}\,\text{K}^{-4}\,.$$

La derivazione rispetto a T dell'equazione precedente, per trovare il massimo, porterebbe ad un'equazione di 5° grado (v. sotto). Per via numerica si può calcolare W iniziando dal valore già ottenuto per 1600°C, con un passo di 200°C a *scendere*. Infatti facendo il calcolo a 1600°C si nota che le perdite radiative (rapidamente variabili perché dipendono da T^4) sono nettamente maggiori di W_1; quindi la temperatura di 1600°C è sicuramente più alta del valore che ottimizza la potenza meccanica.

Si trova che il massimo sta tra 800°C e 1000°C, come appare evidente riportando i valori su un grafico, dato che $W(600°\text{C}) < W(1000°\text{C})$.

T [°C]	T [K]	W [kW]
1400	1673	4.30
1200	1473	8.27
1000	1273	9.05
800	1073	9.20
600	873	8.75



T [°C]	T [K]	W [kW]
900	1173	9.20
850	1123	9.22

A questo punto (v. tabella a destra) si può procedere con metodo dicotomico, ma si trova che il valore a 900°C è uguale, entro la terza cifra, a quello a 800°C. Il valore di W a 850°C è appena di poco superiore e quindi può essere accettato. Ad esso corrisponde una potenza meccanica di 9.22 kW.

Con questo procedimento i calcoli numerici vengono ripetuti solo sette volte.

Un modo alternativo consiste nel calcolare la derivata della $W(T)$ e cercare per via numerica il valore di T per cui essa si annulla:

$$\frac{dW(T)}{dT} = 4\beta T^5 - 3\beta T_0 T^4 - \alpha T_0 = 0$$

si può usare anche qui, in modo equivalente, il metodo dicotomico.

Un metodo iterativo molto efficace si può seguire scrivendo l'equazione precedente in questa forma

$$4\beta T^5 \left(1 - \frac{3T_0}{4T}\right) = \alpha T_0 \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt[5]{\frac{\alpha T_0}{4\beta\,(1 - 3T_0/(4T))}}$$

Poiché $T_0/T \ll 1$ si ottiene una prima approssimazione di T ponendo $T_0/T = 0$ e iterando successivamente in questo modo:

$$T_1 = \sqrt[5]{\frac{\alpha T_0}{4\beta}} = 1076\,\text{K} \quad \text{e} \quad T_n = \sqrt[5]{\frac{\alpha T_0}{4\beta\,\left(1 - 3T_0/(4T_{n-1})\right)}}$$

La sequenza può essere limitata alle prime due iterazioni, come mostrato in tabella:

T_{n-1} [K]	T_n [K]	T_n [°C]	W [kW]
1076	1126	853	9.205
1126	1124	851	9.222
1124	1124	851	9.222

PROBLEMA n. 3 – Sollevamento pesi

100 Punti

Quesito n. 1.

Poiché il cerchione ha resistenza trascurabile, con il collegamento proposto la corrente scorrerà in tutti i bracci dal centro alla periferia o dalla periferia al centro, a seconda della polarità. L'intensità di corrente in ciascun raggio risulta $i_0 = V_0/R$.

La tensione del filo tende a far girare la ruota in senso orario, quindi, per avere l'equilibrio, il momento della forza magnetica agente sui raggi deve essere orientato in senso opposto. La forza magnetica applicata a ciascun braccio è $\vec{F} = i\vec{\ell} \times \vec{B}$ dove $\vec{\ell}$ è un vettore orientato nel verso della corrente: questa dovrà quindi scorrere dal cerchione verso l'asse della ruota. Quindi il polo della batteria collegato all'asse dovrà essere quello negativo.

Siccome la forza magnetica è uniformemente distribuita, la si può considerare applicata nel centro di ciascun raggio, e il modulo del momento magnetico complessivo risulta quindi $4B\ell i_0 \, {}^1\!/\!_2 \, \ell = 2Bi_0\ell^2$.

Per avere l'equilibrio dovrà quindi essere $2Bi_0\ell^2 = Mg\ell$, da cui si ricava:

$$V_0 = \frac{MgR}{2B\ell} = 0.167\,\mathrm{V}$$

Quesito n. 2.

Le cariche presenti nei raggi della ruota in moto subiscono una forza uguale alla forza di Lorentz il cui modulo è $F = |q|\; vB$. Per una carica a distanza r dall'asse $v = \omega r$. La forza elettromotrice indotta ai capi di ciascun raggio risulta quindi:

$$\mathcal{E} = \int_0^\ell \frac{F}{q}\,dr = \int_0^\ell B\omega r\,dr = \frac{1}{2}\,B\omega\,\ell^2$$

Per quanto riguarda il verso della f.e.m. indotta, se la ruota gira in senso antiorario è tale da favorire una corrente che va dall'asse verso il bordo.

Quesito n. 3.

Poiché il valore di V è superiore a quello trovato al punto 1, il momento delle forze magnetiche è inizialmente maggiore del momento dato dalla tensione del filo e l'oggetto viene sollevato con una certa accelerazione. All'aumentare della velocità cresce la f.e.m. indotta che si sottrae a quella fornita dal generatore.

Di conseguenza la corrente in ciascun raggio non è più i_0, ma assume il valore (che dipende dalla velocità):

$$i = \frac{V - {}^1\!/\!_2\,\ell^2 B\omega}{R} = \frac{V - {}^1\!/\!_2\,\ell B v}{R}$$

All'aumentare della velocità diminuisce il momento magnetico $2Bi\ell^2$.

Si raggiunge quindi un equilibrio dinamico quando i due momenti sono uguali:

$$2Bi\ell^2 = Mg\ell \quad \text{da cui} \quad \frac{2B\ell V - \ell^2 B^2 v}{R} = Mg$$

e infine:

$$v = \frac{2B\ell V - MgR}{\ell^2 B^2} = \frac{2}{B\ell}\,(V - V_0) = 3.33\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Si nota che la corrente, in condizioni stazionarie, torna al valore i_0.

Quesito n. 4.

Il rendimento è dato dal rapporto tra la potenza necessaria per il sollevamento della massa a velocità costante e la potenza erogata dal generatore:

$$\eta = \frac{Mgv}{4Vi_0} = \frac{B\ell\,v}{2V} = \left(1 - \frac{V_0}{V}\right) = 33\,\%$$

Quesito n. 5.

Valgono ancora le considerazioni svolte al punto 3, ma questa volta con $V = 0$. Risulta quindi:

$$v' = \frac{2V_0}{B\ell} = \frac{MgR}{B^2\ell^2} = 6.67\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Quesito n. 6.

Come già accennato, in condizioni di velocità costante il momento delle forze magnetiche equilibra il momento della tensione e quindi la corrente assume il valore i_0 calcolato al punto 1 sia in salita che in discesa.

La variazione di temperatura è proporzionale al calore sviluppato per effetto Joule e quindi proporzionale a i^2 e al periodo di rotazione. Di conseguenza il riscaldamento in un giro sarà maggiore quando la velocità è minore.

Essendo

$$\frac{v}{v'} = \frac{V - V_0}{V_0}$$

per $V > 2V_0$ la velocità è maggiore in salita e il riscaldamento è maggiore in discesa; viceversa per $2V_0 < V < V_0$, come accade con i valori numerici assegnati.

NOTA: Il problema è stato sviluppato da un'idea di Andrea Stefanini dell'I.T.I. di Livorno, al quale il Gruppo Olimpiadi rivolge un sentito ringraziamento per la collaborazione.

Materiale prodotto dal gruppo

PROGETTO OLIMPIADI
Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica
presso Liceo Scientifico "U. Morin"
VENEZIA MESTRE
fax: 041.584.1272
e-mail: olifis@libero.it

La Gara Nazionale è realizzata con il sostegno di

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Comune di Senigallia

Liceo Scientifico "E. Medi" di Senigallia

Zanichelli editore