OLIMPIADI DI FISICA 2013

Gara Nazionale
Prova Teorica
Venerdì 12 Aprile 2013
Liceo Scientifico "E.Medi"
Senigallia (AN)

Soluzioni

PROBLEMA n. 1 – Un "velo" viscoso

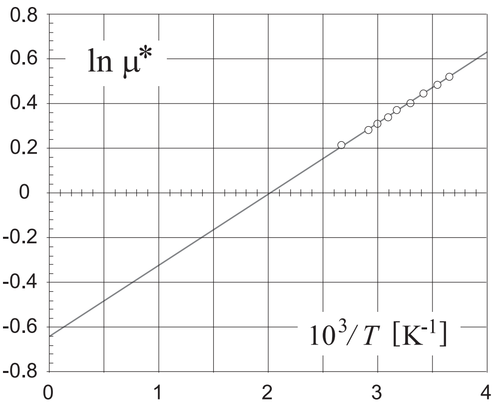
Quesito n. 1.

Il modo migliore per ricavare i valori di parametri fisici da un grafico è di linearizzare la funzione da rappresentare. Nel caso del problema si ottiene la linearizzazione della funzione riportando il logaritmo della viscosità in funzione dell'inverso della temperatura. Prendendo il logaritmo della relazione di Arrhenius si ottiene

Temperatura T (°C)	Viscosità μ (mPa s)	T (K)	$10^3/T$ (K^{-1})	$\ln\mu^\star$
0	1.681	273.15	3.66	0.52
10	1.621	283.15	3.53	0.48
20	1.552	293.15	3.41	0.44
30	1.499	303.15	3.30	0.40
40	1.450	313.15	3.19	0.37
50	1.407	323.15	3.09	0.34
60	1.367	333.15	3.00	0.31
70	1.327	343.15	2.91	0.28
100	1.232	373.15	2.68	0.21

$$\ln\mu^\star = \ln\mu_0^\star + \frac{E}{RT}$$

(dove, poiché gli argomenti delle funzioni trascendenti devono essere adimensionali, abbiamo introdotto le quantità adimensionali $\mu^\star = \mu/(1\ \mathrm{mPa\,s})$ e analogamente $\mu_0^\star$) da cui la tabella dei dati ed il grafico che segue.



Dalla lettura del grafico si ricava un andamento lineare in scala logaritmica, $y = mx + q$, dove si è posto $y = \ln\mu^\star$ e $x = 10^3/T$.

I valori che si ottengono con il metodo grafico possono variare entro certi margini; si considerano accettabili quelli entro questi intervalli

$$-0.667 \le q \le -0.618; \qquad 0.310\,\mathrm{K} \le m \le 0.325\,\mathrm{K}$$

cui corrispondono, per μ_0 ed E, gli intervalli

$$0.513\,\mathrm{mPa\,s} \le \mu_0 \le 0.539\,\mathrm{mPa\,s} \quad \mathrm{e}$$

$$2576\,\mathrm{J\,mol^{-1}} \le E \le 2700\,\mathrm{J\,mol^{-1}}.$$

Un'analisi più rigorosa, condotta con il metodo dei minimi quadrati, fornisce questi valori:
per l'intercetta $q = -0.64$, da cui $\mu_0 = 0.53\,\mathrm{mPa\,s}$;
per il coefficiente angolare $m = 0.32\,\mathrm{K}$, quindi $E/R = 320\,\mathrm{K} \quad\Rightarrow\quad E = 2659\,\mathrm{J\,mol^{-1}}$.

Quesito n. 2.

La forza peso $\vec{P}$ agente sulla porzione del *velo d'acqua* compresa tra x e s vale in modulo

$$P = mg = \rho g V = \rho g \ell h (s - x)$$

Quesito n. 3.

Il modulo della forza $\vec{F}$ di attrito viscoso agente lungo il piano σ del *velo d'acqua* è quella tra due piani verticali posti a cavallo di σ, ad una distanza infinitesima dx:

$$F = \mu \ell h \frac{dv}{dx} \qquad \text{dove } dv \text{ è la differenza infinitesima di velocità tra due strati.}$$

Quesito n. 4.

Poiché siamo in condizioni di regime, e in particolare è nulla l'accelerazione dell'acqua, è nulla la risultante delle forze agenti sulla porzione del *velo d'acqua* compresa tra x e s

$$F - P = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \ell h \frac{dv}{dx} - \rho g \ell h (s - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad dv = \frac{\rho g}{\mu}(s - x)\, dx$$

Integrando in x l'ultima espressione tra 0 ed un generico punto x, e ricordando che $v(0) = 0$, si ha

$$v(x) = \int_0^x \frac{\rho g}{\mu}(s - x)\, dx = \frac{\rho g}{\mu}\left(sx - \frac{1}{2}x^2\right)$$

Quesito n. 5.

Si consideri un rettangolo orizzontale infinitesimo, di lati ℓ e dx. Il volume d'acqua, dV, che attraversa questo rettangolo in un intervallo di tempo Δt è: $\quad dV = \ell\, dx\, v(x)\, \Delta t$.

Di conseguenza la portata infinitesima dQ attraverso questo rettangolo risulta:

$$dQ = \frac{dV}{\Delta t} = \ell v(x)\, dx = \frac{\rho g \ell}{\mu}\left(sx - \frac{1}{2}x^2\right) dx$$

Integrando in x tra 0 ed s si ottiene

$$Q = \int_0^s \frac{\rho g \ell}{\mu}\left(sx - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{\rho g \ell s^3}{3\mu}$$

Essa è inversamente proporzionale alla viscosità e proporzionale al cubo dello spessore del velo d'acqua e alla sua larghezza ℓ.

PROBLEMA n. 2 – L'attrazione dell'induzione elettrostatica

Quesito n. 1.

In condizioni di equilibrio il campo e.s. dentro il materiale conduttore è nullo: $\vec{E}(Q) = 0$.

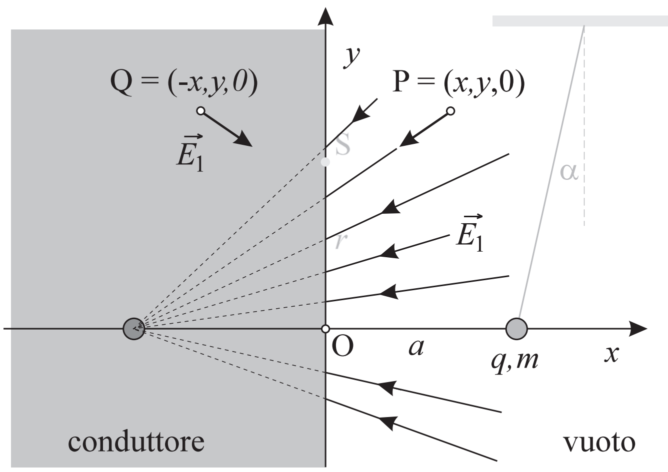
Poiché questo è la somma del campo $\vec{E}_1(Q)$ prodotto dalla distribuzione di cariche indotte σ e del campo $\vec{E}_2(Q)$ prodotto dalla carica q, risulta

$$\vec{E}_1(Q) = -\vec{E}_2(Q) = -\frac{k\, q\, \vec{r}_0}{r_0^3}$$

dove $\vec{r}_0$ è il vettore posizione del punto Q rispetto alla carica q e $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$:

$$\vec{r}_0 = -(a + x)\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} \quad \text{da cui}$$

$$\vec{E}_1(Q) = k\, q\, \frac{(x + a)\,\hat{\imath} - y\,\hat{\jmath}}{\left[(x + a)^2 + y^2\right]^{3/2}}$$



NOTA: Nelle due figure della soluzione è rappresentato il caso $q > 0$; nel caso opposto tutti i versi devono essere invertiti.

Quesito n. 2.

La distribuzione $\sigma(r)$, essendo nel piano $x = 0$, è simmetrica per riflessione rispetto al medesimo piano; ne segue che anche il campo prodotto da questa deve godere della stessa simmetria, per cui nel punto P, simmetrico di Q, la componente x del campo si inverte e quella y è uguale:

$$\vec{E}_1(P) = -k\,q\,\frac{(x+a)\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}}{\left[(x+a)^2+y^2\right]^{3/2}}$$

Sempre per simmetria si può dire che il vettore campo e.s. in P è allineato con il punto $(-a, 0, 0)$ simmetrico di $(a, 0, 0)$; poiché P è un punto generico, tutte le linee di campo nel semispazio $x > 0$ appartengono a rette passanti per $(-a, 0, 0)$, come mostrato in figura.

Per intensità, direzione e verso, il campo $\vec{E}_1$ prodotto dalla distribuzione σ nel semispazio $x > 0$ è identico a quello di una singola carica q', puntiforme, di valore $-q$ e posta nel punto $(-a, 0, 0)$.

Quesito n. 3.

Il campo (totale) $\vec{E}$ nel punto generico P è ancora la somma vettoriale del campo $\vec{E}_2$ della carica q e di quello $\vec{E}_1$ della sola carica indotta σ che può essere sostituito da quello di una carica puntiforme $q' = -q$, come detto sopra:

$$\vec{E}(P) = k\,q\,\frac{(x-a)\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}}{\left[(x-a)^2+y^2\right]^{3/2}} - k\,q\,\frac{(x+a)\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}}{\left[(x+a)^2+y^2\right]^{3/2}}$$

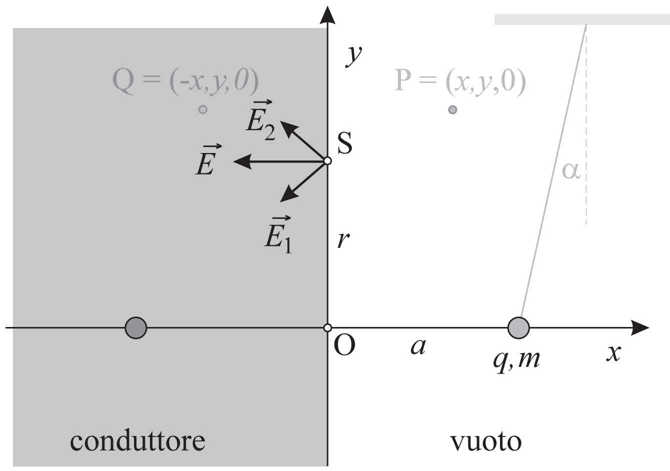
In particolare in A $= (a, a, 0)$ si ottiene

$$\vec{E}(P) = k\,q\,\frac{\hat{\jmath}}{a^2} - k\,q\,\frac{2\,\hat{\imath} + \hat{\jmath}}{5\sqrt{5}\,a^2} = k\,q\,\frac{-2\,\hat{\imath} + (5\sqrt{5}-1)\,\hat{\jmath}}{5\sqrt{5}\,a^2}$$

Quesito n. 4.

Dall'espressione generale, in prossimità del punto S ($x \to 0^+, y = r, z = 0$) si ha

$$\vec{E}(S) = k\,q\,\frac{(-a)\,\hat{\imath} + r\,\hat{\jmath}}{\left[(-a)^2+r^2\right]^{3/2}} - k\,q\,\frac{a\,\hat{\imath} + r\,\hat{\jmath}}{\left[a^2+r^2\right]^{3/2}} = $$
$$= -\frac{2k\,q\,a\,\hat{\imath}}{\left[a^2+r^2\right]^{3/2}}$$



Quesito n. 5.

In prossimità di un piano conduttore all'equilibrio si ha che il campo e.s. ha solo la componente perpendicolare al piano; per il teorema di Coulomb (conseguenza del teorema di Gauss) tale componente, orientata positivamente verso l'esterno del conduttore, è $E = \sigma/\varepsilon_0$, per cui

$$\sigma(r) = \varepsilon_0\,E(r) = \frac{-q\,a}{2\pi\,(a^2+r^2)^{3/2}} \qquad \text{essendo} \qquad \varepsilon_0\,k = \frac{1}{4\pi}$$

Il massimo del modulo della densità di carica si ha, com'è intuitivo, per $r = 0$, dove σ vale

$$\sigma_0 = \varepsilon_0\,E(0) = \frac{-q}{2\pi\,a^2}$$

Nel caso $q > 0$ risulta quindi $\sigma < 0$ e il campo e.s. punta verso il conduttore; al contrario per $q < 0$.

Quesito n. 6.

Poiché il campo delle cariche indotte è uguale a quello di una singola carica $-q$, la forza di attrazione tra la carica q e la carica indotta è uguale a quella dovuta alla carica $-q$ a distanza $2a$ dalla sferetta

$$\vec{F} = -\frac{k\,q^2}{4a^2}\,\hat{\imath}$$

Sulla sferetta, oltre a questa forza agiscono il peso $\vec{P}$ e la tensione del filo $\vec{T}$. All'equilibrio deve essere

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{T} = 0$$

che, espressa in termini di componenti x ed y, dà le due equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{k\,q^2}{4a^2} = T\ \mathrm{sen}\,\alpha \\ mg = T\ \cos\alpha \end{cases}$$

Dividendo membro a membro e risolvendo rispetto all'incognita q si ha

$$q = \pm 2a\sqrt{\frac{mg\ \tan\alpha}{k}}$$

Quesito n. 7.

A) Per integrazione diretta.

La distribuzione di carica indotta presenta (ovviamente) una simmetria per rotazione attorno all'asse x. È quindi conveniente utilizzare sul piano separatore (y, z) le coordinate polari; in particolare la densità di carica dipende solo dalla distanza r tra l'origine O e il punto considerato:

$$\sigma(r) = \frac{-q\,a}{2\pi\,(a^2 + r^2)^{3/2}} \quad \text{come già trovato al punto 5.}$$

Per avere la quantità totale di carica indotta occorre integrare questa distribuzione su tutto il piano; in virtù della simmetria conviene scegliere come elemento infinitesimo di superficie una corona circolare di raggio r e spessore dr cosicché l'area risulta $ds = 2\pi r\,dr$ (Nota: al primo ordine in dr si può trovare anche come differenza tra l'area del cerchio di raggio $r + dr$ e quello di raggio r).

L'integrale da calcolare è elementare operando la sostituzione $u = a^2 + r^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2r\,dr$, come segue

$$Q_{\mathrm{ind}} = \int_S \sigma\,ds = \int_0^\infty \frac{-q\,a}{2\pi\,(a^2 + r^2)^{3/2}}\,(2\pi\,r)\,dr = -q\,a\int_0^\infty \frac{r\,dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,q\,a\int_{a^2}^\infty u^{-3/2}\,du =$$

$$= q\,a\,\left|u^{-1/2}\right|_{a^2}^{\infty} = -q$$

B) Utilizzando il teorema di Gauss.

Si deve considerare una superficie chiusa costituita da un cerchio di raggio R su di un piano parallelo al piano $x = 0$ e con centro in qualunque punto $x < 0$ (tipicamente si prenderà appena dentro il materiale conduttore), e una superficie emisferica dalla parte dell'asse x positivo.

Per il teorema di Gauss il flusso del campo elettrico attraverso questa superficie è proporzionale alla quantità di carica che essa contiene.

Se adesso si considera la superficie limite ottenuta facendo tendere $R \to \infty$ la quantità di carica contenuta al suo interno sarà

$$Q_{\mathrm{tot}} = q + Q_{\mathrm{ind}}$$

mentre il flusso del campo elettrico tende a zero in quanto il campo nello spazio $x > 0$ a grande distanza è quello di un dipolo che decresce come $1/R^3$ mentre la superficie cresce come R^2.

Ne segue che

$$Q_{\mathrm{tot}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{\mathrm{ind}} = -q\,.$$

PROBLEMA n. 3 – Pressione di radiazione con moto elicoidale

Quesito n. 1.

Per la legge di Stefan, poiché la sfera è un corpo nero, la potenza irradiata è $P_{\rm rad} = 4\pi r^2\sigma T_0^4$, ove σ è la costante di Stefan-Boltzmann. Poiché l'ambiente si trova alla stessa temperatura della sfera e quindi il sistema è in equilibrio termico, la potenza assorbita è uguale a quella irradiata. Con i valori numerici assegnati si ha $P_{\rm rad} = 13.2\,\mu$W.

Quesito n. 2.

Trattandosi di un corpo nero che assorbe completamente la radiazione incidente, la potenza del fascio laser assorbita dalla sfera è

$$P_{\rm ass} = P\frac{\pi r^2}{\pi(d/2)^2} = \frac{4Pr^2}{d^2}\,. \quad \text{Il rapporto richiesto è} \quad \frac{P_{\rm ass}}{P_{\rm rad}} = \frac{P}{\pi d^2\sigma T_0^4}\,.$$

Con i valori numerici assegnati si ha $P_{\rm ass} = 80.0\,$W; $P_{\rm ass}/P_{\rm rad} = 6.08\times 10^6$.

Quesito n. 3.

La potenza netta scambiata con l'ambiente quando la sfera è alla temperatura T è

$$P_{\rm exc} = 4\pi r^2\sigma(T^4 - T_0^4)$$

Poiché, nell'intervallo di temperature considerato, il fattore $T^4 - T_0^4$ è , al più, dello stesso ordine di grandezza di T_0^4, la potenza netta scambiata con l'ambiente è anch'essa trascurabile rispetto a quella assorbita dal laser. Possiamo quindi limitarci a considerare l'energia assorbita dal fascio laser che, per l'approssimazione suggerita nel testo, va completamente nel riscaldamento della sferetta. Al tempo t_{100} la richiesta variazione di temperatura $\Delta T = 80.0\,$K si ha se $P_{\rm ass}\,t_{100} = C\,\Delta T$, quindi

$$t_{100} = \frac{C\,\Delta T\,d^2}{4Pr^2}\,. \quad \text{Con i valori numerici assegnati si ha } t_{100} = 1.80\,\mu\text{s}.$$

Quesito n. 4.

Sia n il numero di fotoni assorbiti dal fascio laser da parte della sfera, per unità di tempo. Poiché ognuno trasporta una quantità di energia pari a hf (dove f è la sua frequenza) abbiamo

$$n = \frac{P_{\rm ass}}{hf} = \frac{4P\lambda r^2}{hcd^2}\,, \qquad \text{dove naturalmente } c \text{ è la velocità della luce.}$$

Ciascun fotone ha una quantità di moto $p = h/\lambda$ (relazione di de Broglie).

La sfera, essendo un corpo nero, emette radiazione infrarossa in modo isotropo, e quindi la quantità di moto globalmente associata a questa radiazione è nulla. L'alta conducibilità termica del materiale garantisce che questa radiazione si mantenga isotropa anche durante il riscaldamento operato dalla radiazione assorbita dal laser. In ogni caso, poiché la potenza irradiata è molto minore di quella assorbita, anche il numero di fotoni irradiati è molto minore di quelli assorbiti (la frequenza è dello stesso ordine di grandezza: per la legge di Wien il massimo di emissione a 20°C è circa a $10\,\mu$m).

La sfera quindi in un tempo Δt varierebbe la sua quantità di moto, per il solo effetto della radiazione assorbita, di una quantità

$$m\,\Delta v = np\Delta t = \frac{4Pr^2}{cd^2}\Delta t \qquad \text{e quindi subisce una spinta verso l'alto} \qquad F = \frac{m\,\Delta v}{\Delta t} = \frac{4Pr^2}{cd^2}\,.$$

Questa spinta è in verso contrario al peso e quindi la componente verticale (verso l'alto) della forza complessiva agente risulta

$$\frac{4Pr^2}{cd^2} - mg \qquad \text{e quindi l'accelerazione è} \qquad a = \frac{4Pr^2}{cd^2 m} - g$$

Con i valori numerici assegnati si ha $a = 47.2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$; essendo tale valore positivo, l'accelerazione è rivolta verso l'alto.

Quesito n. 5.

Come dice il testo, poiché la radiazione è polarizzata circolarmente ciascun fotone ha un momento angolare $L = h/(2\pi)$ rivolto nel verso di propagazione della radiazione, e quindi verso l'alto; una volta che il fotone è assorbito, tale momento angolare viene trasmesso alla sferetta per il principio di conservazione del momento angolare[1]. Nel tempo Δt la sfera acquista dunque un momento angolare

$I\,\Delta\omega = nL\,\Delta t = \dfrac{2P\lambda r^2}{\pi c d^2}\Delta t$ dove I è il momento d'inerzia, per cui l'accelerazione angolare risulta

$\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{5P\lambda}{\pi c d^2 m}$. Con i valori numerici assegnati si ha $\alpha = 9.60 \times 10^4\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$.

Quesito n. 6.

Il passo H dell'elica è pari allo spazio percorso dal centro della sfera mentre essa ruota di 2π. Poiché sia a che α sono costanti, e le velocità iniziali sono nulle, il rapporto fra spazi e angoli percorsi è indipendente dal tempo ed è uguale al corrispondente rapporto fra le accelerazioni, quindi è

$H = 2\pi\dfrac{a}{\alpha} = \dfrac{2\pi^2}{5\lambda}\left(4r^2 - \dfrac{cd^2mg}{P}\right)$. Con i valori numerici assegnati si ha $H = 3.09\,\mathrm{mm}$

Quesito n. 7.

Poiché a è costante e la velocità iniziale è nulla, la velocità raggiunta al tempo t_{100} è semplicemente

$v = a\,t_{100} = C\,\Delta T\left(\dfrac{1}{cm} - \dfrac{d^2g}{4Pr^2}\right)$. Analogamente la velocità angolare è $\omega = \alpha\,t_{100} = \dfrac{5C\,\Delta T\,\lambda}{4\pi\,cmr^2}$.

Con i valori numerici assegnati si ha $v = 84.9\,\mu\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\omega = 0.173\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

(1) In realtà la situazione non è così semplice, essendoci scambio fra momento angolare di spin e momento angolare orbitale. Tuttavia, date le dimensioni della sferetta, che sono quasi dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda della radiazione, si può considerare che valga la così detta "approssimazione parassiale" per la quale l'ipotesi fatta è valida.