

URTI E RIMBALZI DI UNA PALLINA DA PING-PONG

1. Perdita di velocità nel rimbalzo

Nota sul “coefficiente di restituzione”

Nei testi di Fisica Generale si legge che in un urto tra due corpi le reazioni elastiche che tendono a riportarli alle loro forme primitive sono sempre minori delle forze che hanno prodotto le deformazioni, e che l'impulso su ciascuno dei due corpi nella seconda fase dell'urto è minore di quello nella prima fase.

L'esperienza mostra che il rapporto tra gli impulsi delle due forze è costante per una data coppia di corpi, finché l'urto non è così violento da produrre deformazioni permanenti. A questo rapporto si dà il nome di “coefficiente di restituzione”. Il coefficiente così definito risulta uguale al rapporto tra le velocità relative dei due corpi dopo l'urto e prima dell'urto.

Nel nostro caso, in cui la tavoletta è ferma, il coefficiente di restituzione risulta uguale al rapporto tra la velocità della pallina dopo e prima dell'urto con la tavoletta.

Procedimento

Scelta la quota h_0 di partenza, si procede per tentativi, aggiustando via via la posizione dell'elastico finché risulta uguale alla quota h_1 raggiunta nel rimbalzo, con un'incertezza non superiore al mezzo centimetro. Oppure si può scegliere una quota per il rimbalzo e cercare per tentativi la corrispondente quota di partenza.

Un esempio di risultati ottenuti scegliendo come punto di riferimento l'estremo inferiore P del diametro verticale, è mostrato in Tabella 1.

Diametro della pallina $2r = (4.00 \pm 0.05)$ cm;

altezza di caduta $h = h_0 - h_b$ con h_0 quota di P alla partenza;

altezza di rimbalzo $h' = h_1 - h_b$, con h_1 quota massima di P al rimbalzo;

spessore della tavoletta $h_b = (1.80 \pm 0.05)$ cm.

Per la conservazione dell'energia meccanica durante i due tempi di volo della pallina, risulta

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2; \quad \frac{1}{2}mv'^2 = mgh' \quad \Rightarrow \quad e_v = \sqrt{h'/h}.$$

| h_0 (cm) ± 0.1 cm | h_1 (cm) ± 0.5 cm | h (cm) ± 0.2 cm | h' (cm) ± 0.6 cm | $e_v = \sqrt{h'/h}$ | Media aritmetica e_v |
|----------------------------|----------------------------|--------------------------|---------------------------|---------------------|---------------------------|
| 50.0 | 33.0 \pm 0.5 | 48.2 | 31.2 | 0.805 | 0.81 |
| | 34.0 | | 32.2 | 0.817 | |
| | 34.0 | | 32.2 | 0.817 | |
| 40.0 | 28.0 | 38.2 | 26.2 | 0.828 | 0.83 |
| | 28.0 | | 26.2 | 0.828 | |
| | 28.0 | | 26.2 | 0.828 | |
| 30.0 | 21.0 | 28.2 | 19.2 | 0.825 | 0.85 |
| | 22.5 | | 20.7 | 0.857 | |
| | 22.5 | | 20.7 | 0.857 | |
| 20.0 | 15.0 | 18.2 | 13.8 | 0.852 | 0.85 |
| | 14.5 | | 12.7 | 0.835 | |
| | 14.5 | | 12.7 | 0.852 | |

Tabella 1

Media aritmetica di tutte le misure = 0.833; semidispersione = 0.0295; $e_v = 0.83 \pm 0.03$ ($\pm 4\%$)

Assumendo la semidispersione come stima dell'incertezza di e_v , questo si può ritenere costante entro il 4%, nell'intervallo di quote di caduta tra 50 cm e 20 cm.

Al medesimo risultato si può giungere costruendo il grafico cartesiano di h' in funzione di h . La retta interpolante i dati, tenuto conto delle incertezze precedentemente tabulate, passa per l'origine degli assi e permette di determinare il coefficiente di restituzione dalla radice quadrata del suo coefficiente angolare.

Si ottengono questi risultati nell'ipotesi di conservazione dell'energia meccanica in un moto di pura traslazione.

Si nota però che per le cadute da minor altezza il coefficiente di restituzione ha valori più alti. Ciò si può spiegare tenendo conto della resistenza dell'aria, del suo minore effetto sui voli più brevi, e quindi dalla tabella è preferibile scegliere il valore 0.85.

Difatti, fissata un'altezza di partenza h , la velocità v calcolata con la conservazione dell'energia è certamente maggiore di quella effettiva che chiamiamo V ; d'altra parte per arrivare ad un'altezza h' dopo il rimbalzo, la velocità iniziale V' deve essere maggiore di quella (v') che basterebbe se non ci fosse dissipazione di energia. Dunque il coefficiente effettivo di restituzione, che chiamiamo E_v risulta maggiore di quello stimato con la conservazione dell'energia essendo

$$E_v = \frac{V'}{V} > \frac{v'}{v} = e_v$$

È abbastanza ovvio che, al crescere di h e di h' , il coefficiente stimato e_v è progressivamente più piccolo di quello effettivo E_v .

L'incertezza ricavata per propagazione, dai dati della penultima serie di misura è uguale a

$$1/2 (0.2/28.2 + 0.6/20) 0.85 = 0.02$$

Il risultato è dunque: $e_v = 0.85 \pm 0.02$.

2. Durata dell'urto dalle dimensioni dell'impronta

Se h_0 è la quota del punto superiore del diametro verticale, l'altezza di caduta della pallina è:

$$h = h_0 - 2R - h_b;$$

Perché sia $h = 25.0$ cm, la quota di partenza risulta:

$$h_0 = (25.0 + 4.00 + 1.8) \text{ cm} = 30.8 \text{ cm}$$

L'impiego del carboncino distribuito omogeneamente sulla carta che aderisce alla tavoletta rende le tracce molto evidenti e ben definite nei loro contorni sia sulla tavoletta che sulla superficie sferica della pallina rendendo la misura del diametro affidabile e ripetibile.

Si lascia cadere la pallina più volte sulla base annerita. Si formano tracce più chiare sulla base, e in corrispondenza tracce grigie sulla pallina. Si misurano i diametri $2a$ delle tracce più "regolari" sulla base, oppure sulla pallina. Si considerano "regolari", se la squadra sistemata in modo da sfiorare il punto nero al centro, dà per la distanza tra i due bordi lo stesso valore, per diversi orientamenti. Questo valore è assunto come diametro della traccia (figura S1).

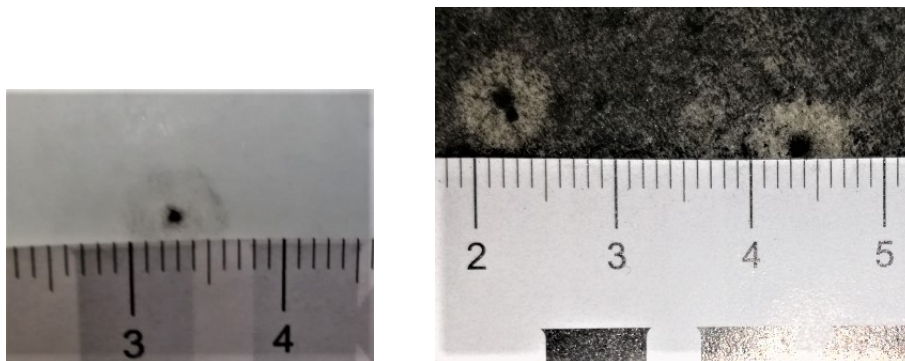


Figura S1.

Esaminando diverse tracce si giunge alla seguente conclusione:

- diametro delle tracce sulla tavoletta: (7.0 ± 0.5) mm;
- diametro delle tracce sulla pallina: (6.0 ± 0.5) mm.

I valori dei diametri delle tracce sulla pallina risultano minori di quelli sulla tavoletta.

Durata t dell'urto:

Si calcola la durata dell'urto, assumendo che la pallina sia soggetta alla forza risultante tra quella di interazione con la tavoletta e il suo peso. Entrambe le forze sono da considerare costanti, vista l'ipotesi sulla forza di interazione. La pallina non è più un corpo rigido come durante il volo. Il moto del punto O (v. figura 4 del testo), è da considerarsi uniformemente accelerato con accelerazione negativa nella fase di compressione e con accelerazione positiva nella fase di espansione. Si possono applicare le formule della cinematica per i moti con accelerazione costante, o semplicemente considerare che la velocità media in ciascuna delle due fasi si può esprimere come media aritmetica tra velocità iniziale e finale.

Nella fase di compressione, di durata t_1 , l'area sotto il grafico della velocità in funzione del tempo, corrisponde allo spazio percorso d , ed è data da $d = t_1 v/2$. Nella seconda fase, di durata t_2 , l'area tra grafico e asse del tempo, è $d = t_2 v'/2$.

Dalle relazioni

$$v = \sqrt{2gh} \text{ nella prima fase dell'urto,}$$

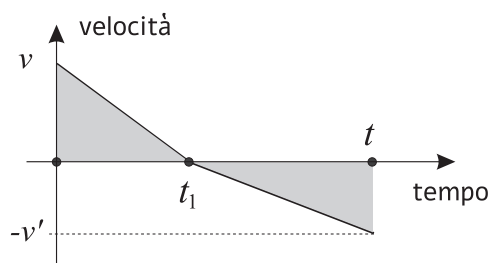
$$v' = e_v \sqrt{2gh}, \text{ nella seconda fase, e}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2d}{\sqrt{2gh}} + \frac{2d}{e_v \sqrt{2gh}}$$

$$d = r - \sqrt{r^2 - a^2}$$

si ricava facilmente

$$t = \frac{2(r - \sqrt{r^2 - a^2})}{\sqrt{2gh}} \left(1 + \frac{1}{e_v}\right)$$



Esempio di risultati:

| Altezza di caduta h (cm) | Diametro traccia $2a$ (mm) | Deformazione d (mm) | Durata dell'urto t (s) |
|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------|--------------------------------|
| 25.0 ± 0.1 | 6.0 ± 0.5 | 0.23 ± 0.04 | $(4.5 \pm 0.8) \times 10^{-4}$ |
| | 6.5 ± 0.5 | 0.27 ± 0.04 | $(5.3 \pm 0.8) \times 10^{-4}$ |
| | 7.0 ± 0.5 | 0.31 ± 0.04 | $(6.1 \pm 0.9) \times 10^{-4}$ |

Tabella 2

L'incertezza per t , non richiesta, è stata calcolata tenendo conto unicamente dell'incertezza di ± 0.5 mm sulla misura del diametro della traccia e si sono calcolati i corrispondenti valori minimo e massimo della durata t . L'incertezza è stata assunta uguale alla loro semidifferenza.

Nella seconda riga della tabella 2 si è scelto come diametro della traccia la media aritmetica tra il valore di 7.0 mm sulla tavoletta e di 6.0 mm sulla pallina. La corrispondente deformazione d risulta:

$$d = (0.27 \pm 0.04) \text{ mm.}$$

La durata t espressa in notazione scientifica risulta:

$$t = 5 \times 10^{-4} \text{ s}$$

3. Durata dell'urto da carica del condensatore

Con portata 20 V del voltmetro, si misura la f.e.m. della pila V_p . Per esempio $V_p = (4.55 \pm 0.03) \text{ V}$. L'incertezza strumentale nel manuale operativo del multimetro alla voce "accuracy" vale: $\pm 0.5\%$ della lettura + 1 dgt e, con portata 20 V, 1 dgt vale 0.01 V.

L'incertezza strumentale della lettura con la portata di 2 V è: $\pm 0.5\%$ lettura + 1 mV

Resistenza $R = R_0 + R_p = (51.1 + 1.5) \Omega$ e $C = 560 \mu\text{F} \pm 10\%$

Nella tabella 3 sono riportate 20 misure di d.d.p., ottenute quando il condensatore si è caricato in seguito alla chiusura del circuito: la distribuzione appare abbastanza casuale, con un valore massimo di 93 mV.

Tabella 3

| Altezza caduta (cm) | Lecture al voltmetro V (mV) |
|-----------------------|--|
| $30.8 - 4 - 1.8 = 25$ | $80 - 86 - 44 - 85 - 56 - 87 - 85 - 56 - 51 - 49$ $27 - 85 - 78 - 93 - 69 - 86 - 70 - 87 - 84 - 62$ |

Proseguendo le misure, si sono ottenuti altri valori di d.d.p. distribuiti casualmente.

Si è utilizzato, come migliore indicazione per il calcolo della durata dell'urto, il valore più elevato ottenuto, 121 mV, perché gli errori sistematici, principalmente dovuti al decentramento della caduta rispetto alla fessura fra le due lamine, possono solo causare valori di d.d.p. più bassi di quelli che corrisponderebbero all'effettiva durata dell'urto (vedi risposta alla domanda 4).

La durata t si ricava dalla (1) del testo

$$t = -RC \ln(1 - V/V_p)$$

da cui segue $t = 7.5 \times 10^{-4}$ s, per il valore scelto $V = 121$ mV

Si riportano i tempi di chiusura del circuito ottenibili con tre differenti d.d.p. (tabella 4).

Tabella 4

| D.d.p. (mV) | Tempo di chiusura del circuito (ms) |
|-------------|-------------------------------------|
| 80 | $0.499 \approx 0.5$ |
| 100 | $0.625 \approx 0.6$ |
| 120 | $0.751 \approx 0.8$ |

Da questi dati si può concludere per la durata t

$$t \approx 8 \times 10^{-4} \text{ s,}$$

4. Errori sistematici per la durata dell'urto

Stima di errori sistematici sulla durata dell'urto col metodo delle tracce.

A Considerare costante la forza sulla pallina dovuta all'interazione con la base, comporta un errore sistematico nella durata dell'urto.

Consideriamo la fase di compressione. Se la forza frenante è costante, lo è anche l'accelerazione (negativa) e la velocità in questo modello semplificato decresce linearmente da un valore massimo iniziale a zero. Se invece, come è più realistico pensare, l'intensità della forza frenante cresce a mano a mano che la pallina si deforma, anche il modulo dell'accelerazione cresce.

Nella figura S2 il grafico rettilineo, rappresenta l'andamento ipotizzato per la velocità nel percorso d , in funzione del tempo con forza costante, mentre il tratto curvo rappresenta un andamento della velocità corrispondente al modello di forza variabile: il fondo della pallina si deforma reagendo con una forza di intensità tanto maggiore quanto maggiore è la deformazione, e il modulo dell'accelerazione (coefficiente angolare della retta tangente al grafico $t - v$) ne segue l'andamento.

Le aree sotto i due grafici sono uguali, dato che corrispondono allo stesso percorso d . Supporre un andamento lineare per la velocità, implica dunque una sopravvalutazione della durata t , come appare chiaramente dai due grafici. Un ragionamento analogo vale per la fase di dilatazione, e pertanto il tempo t rilevato nell'ipotesi di forze costanti, è affetto da un errore in eccesso.

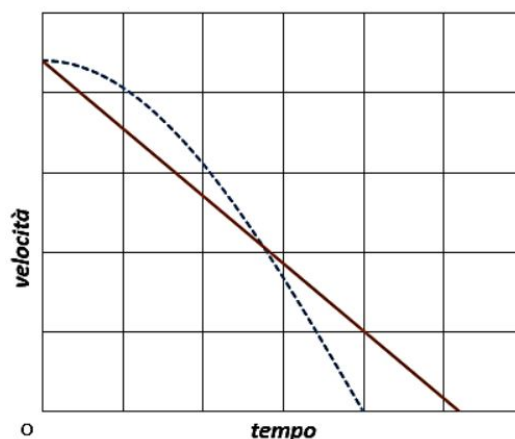


Figura S2.

B Il fatto che i diametri delle tracce sulla pallina risultino sistematicamente minori di quelli sulla tavoletta, si può spiegare pensando che nell'urto la deformazione della pallina avvenga anche in direzione orizzontale, oltre che verticale. Finito l'urto anche questa deformazione sparisce e la macchia si restringe.

Secondo questa interpretazione, il diametro dell'impronta misurato sulla pallina quando questa ha ripreso la forma iniziale non è modificato dalla deformazione in direzione orizzontale durante l'urto, e quindi può essere usato in modo coerente con l'ipotesi fatta per calcolare d e di conseguenza t . Usare invece il diametro della macchia sulla tavoletta ha come conseguenza un errore in eccesso per la durata dell'urto.

Stima dell'errore sistematico sulle misure dei tempi con il circuito RC.

Un errore sistematico è causato dalla differenza tra tempo di chiusura del circuito e durata dell'urto.

Questa differenza è minima, ma non nulla, nel caso fortunato in cui la pallina cada esattamente a metà tra le due strisce di alluminio, poste alla distanza σ (pari a 1 mm).

Indichiamo con τ il tempo impiegato dalla “calotta di base” della pallina per deformarsi in un cerchio di diametro pari a σ . In questo istante la zona conduttrice della pallina tocca le due strisce di alluminio, e chiude il circuito. Il tempo τ esprime quindi l'intervallo di tempo che separa l'istante in cui inizia l'urto e l'istante successivo in cui inizia la chiusura del circuito. La fase di compressione termina quando la calotta di base della pallina si deforma ulteriormente fino a diventare, al tempo t , un cerchio di diametro $2a$. Analogamente nella seconda fase dell'urto, il circuito si apre in anticipo rispetto alla fine dell'urto stesso.

Vi è quindi un ineliminabile errore in difetto nei tempi rilevati, che è minimo nel caso fortunato in cui la differenza di potenziale ai capi del condensatore sia massima, perché corrisponde alla caduta nell'esatto centro dell'intercapedine tra le due strisce di alluminio.

Questo errore si può stimare intorno all'1 %, calcolando τ e t con il modello di forze costanti sulla pallina durante l'urto.

Si può concludere che il risultato che si ottiene per t è una stima per difetto dell'effettiva durata del contatto della pallina con il piano orizzontale.

Un errore sistematico non trascurabile è dovuto alle tolleranze sui valori di R_0 e di C che può alterare significativamente il risultato sia per difetto che per eccesso.

In sintesi:

La durata dell'urto con il metodo del circuito RC, risulta avere lo stesso ordine di grandezza di quella ottenuta attraverso le tracce. È da tener presente che con il circuito RC si ottengono valori in difetto, mentre attraverso le tracce valori in eccesso.

È possibile che l'inserimento del foglio di alluminio sulla base cambi un po' le condizioni dell'urto, rendendo questo più “morbido”, e quindi allungandone la durata.

Bibliografia:

Ha fornito lo spunto per la seconda parte “Durata dell'urto dimensioni dell'impronta” l'articolo

I.V. Oladyshkin, A.A. Oladyshkina: “*Millisecond measurement without equipment: time of collision of a ping-pong ball with a table*”, Phys. Educ. **52** (2017), 013006.

Per articoli di ricerca utili per approfondire il tema della dinamica dell'urto si vedano

R. Cross: “*Impact behaviour of hollow balls*”, American Journal of Physics, **82** (2014), 189-195.

Zhang, Tao, Zhang: “*Dynamic behaviors of visco-elastic thin-walled spherical shells impact onto a rigid plate*”, Latin American Journal of Solids and Structures, **11** (2014), 2607-2623.

per provare a rifarlo...

Indicazioni sui materiali da procurarsi per ripetere l'esperienza:

- Tavoletta di legno ($2\text{ cm} \times 7.5\text{ cm} \times 40\text{ cm}$). Listello di legno lungo 50 cm . Nastro adesivo di alluminio alto 5 cm . Si possono trovare presso i magazzini di bricolage. Le dimensioni sono puramente indicative.
- Condensatore ad elettrolita solido KEMET, $560\text{ }\mu\text{F}$, 25 V DC , resistore da $51.1\text{ }\Omega (\pm 1\%)$, 0.6 W . Si possono trovare in rete o nei negozi per l'elettronica.

I valori di R e C sono indicativi, ma vanno dimensionati in modo che la costante di tempo sia $\tau = RC \approx 10^{-2}\text{ s}$. Le d.d.p. misurate sono in un intervallo in cui il grafico $t - V$ è quasi lineare e con una buona pendenza. Allo stesso tempo la capacità C deve essere sufficientemente alta perché il condensatore non si scarichi troppo velocemente sul voltmetro

- Il carboncino è facilmente reperibile in un negozio di disegno e pittura o in una cartoleria.

Materiale elaborato dal Gruppo



PROGETTO OLIMPIADI
Segreteria delle Olimpiadi Italiane di Fisica

e-mail: segreteria@olifis.it
WEB: www.olifis.it



NOTA BENE

È possibile utilizzare, riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico questo materiale alle due seguenti condizioni: citare la fonte; non usare il materiale, nemmeno parzialmente, per fini commerciali.