Associazione per l'Insegnamento della Fisica

PROGETTO AIF OLIMPIADI

32ª Edizione

Olimpiadi di Fisica 2018

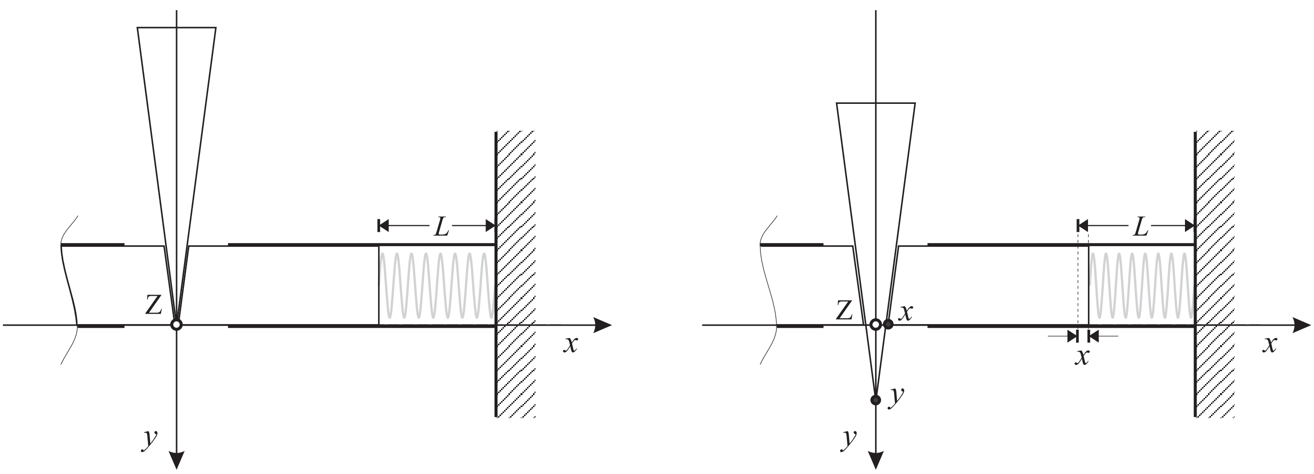
Gara Nazionale
Prova Teorica
Venerdì 13 Aprile 2018

Soluzione

PROBLEMA n. 1 – Cuneo

Si fissa l'origine delle coordinate nel punto Z, cioè nella posizione del vertice del cuneo all'istante iniziale cosicché, essendo il moto del cuneo puramente traslatorio lungo l'asse verticale, la posizione istantanea del cuneo sarà data dalla coordinata y del suo vertice. Analogamente, per il pistone a destra, la coordinata x dello spigolo che inizialmente è nel punto Z dà la posizione di questo nel suo moto puramente traslatorio orizzontale; osservando che il moto di un pistone è il simmetrico di quello dell'altro, sarà sufficiente descrivere il comportamento di uno solo. Per lo stesso motivo si farà riferimento solo alla molla di destra la cui compressione è data dallo stesso valore di x.

La figura seguente mostra sinteticamente quanto detto sopra, nella posizione iniziale (a sinistra) e in una posizione generica (a destra).

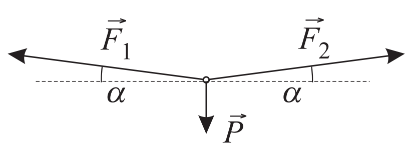


Quesito n. 1.

Sul cuneo agiscono il peso $\vec{P}$ e le due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ esercitate dai due pistoni, entrambe perpendicolari alle pareti dei pistoni. Per simmetria sarà sempre $F_{2,x} = -F_{1,x}$ e $F_{2,y} = F_{1,y}$.

In condizioni di equilibrio deve essere

$$\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0\,.$$



Lungo l'asse x l'equilibrio è assicurato per simmetria, mentre lungo l'asse y , indicando con F_p il valore comune di F_1 e F_2 si ha

$$P - 2F_\text{p} \operatorname{sen}\alpha = 0 \quad \text{da cui} \quad F_\text{p} = \frac{Mg}{2\operatorname{sen}\alpha}\,.$$

Per il terzo principio della dinamica, la forza $\vec{F}_c$ che il cuneo esercita su un pistone è uguale in modulo a quella che il pistone esercita sul cuneo. Il modulo della forza richiesta è quindi:

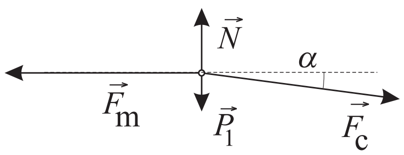
$$F_c = F_p = \frac{Mg}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha} = 18.78\,\mathrm{N}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{18.71 \le F_c \le 18.86 \quad [\,\mathrm{N}\,]}$

Quesito n. 2.

Si considera il pistone destro nella posizione di equilibrio raggiunto. Su di esso agiscono quattro forze: il suo peso $\vec{P}_1$, la forza $\vec{F}_c$ esercitata dal cuneo, la reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata dalle guide e la forza elastica $\vec{F}_m$ della molla. La condizione di equilibrio per il pistone è

$$\vec{P}_1 + \vec{F}_c + \vec{N} + \vec{F}_m = 0\,.$$



Imponendo l'equilibrio sull'asse orizzontale e detta x_p la posizione di equilibrio del pistone, si ottiene

$$F_c \cos\alpha - kx_p = 0, \quad \text{da cui} \quad x_p = \frac{F_c\cos\alpha}{k}\,.$$

Il valore di F_c è lo stesso calcolato nella domanda precedente. Sostituendolo si ottiene la compressione delle molle

$$x_p = \frac{Mg}{2k\,\mathrm{tg}\,\alpha} = 2.33\,\mathrm{cm}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{2.31 \le x_p \le 2.34 \quad [\,\mathrm{cm}\,]}$

Dato che il cuneo resta appoggiato al pistone, ogni spostamento x del pistone è legato a quello corrispondente y del cuneo dalla relazione

$$y = \frac{x}{\mathrm{tg}\,\alpha}\,.$$

Ne segue che, all'equilibrio, l'abbassamento del cuneo, y_c, è

$$y_c = \frac{x_p}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{Mg}{2k\,\mathrm{tg}^2\,\alpha} = 17.7\,\mathrm{cm}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{17.5 \le y_c \le 17.8 \quad [\,\mathrm{cm}\,]}$

SOLUZIONE ALTERNATIVA

La situazione di equilibrio corrisponde a un minimo dell'energia potenziale del sistema, U. Quest'ultima è la somma di due contributi: l'energia gravitazionale del cuneo, $U_c = -Mg\,y$ (si ricordi che l'asse y è orientato verso il basso) e quella elastica delle molle: $U_m = 2\,{}^1\!/_2\,k\,x^2 = k\,\mathrm{tg}^2\alpha\,y^2$ per la relazione tra x e y vista sopra (contatto tra cuneo e pistone). Risulta quindi

$$U = k\,\mathrm{tg}^2\alpha\,y^2 - Mgy$$

che ha un minimo per

$$y_c = \frac{Mg}{2k\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}\,.$$

Quesito n. 3.

Dette a_c e a_p le accelerazioni del cuneo e del pistone destro, lungo le rispettive direzioni di moto, si scrive la seconda legge di Newton per i due oggetti, nella forma componente per componente. Nella situazione iniziale, poiché la molla non è compressa, la forza elastica è nulla.

Cuneo: asse x: $F_1\cos\alpha - F_2\cos\alpha = 0$ per simmetria

asse y: $Mg - 2F_p\,\mathrm{sen}\,\alpha = Ma_c$

Pistone: asse x: $F_c\cos\alpha = ma_p$ con $F_c = F_p$ e $F_m = 0$

asse y: $mg - N + F_c\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0$

Dalla relazione di proporzionalità tra gli spostamenti di cuneo e pistone, $y = x/\mathrm{tg}\,\alpha$, si deduce quella analoga tra le rispettive accelerazioni

$$a_c = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\,a_p$$

che corrisponde a fare la derivata seconda rispetto al tempo dei due spostamenti.

Mettendo a sistema quest'ultima relazione con le equazioni del moto del cuneo sull'asse y e del pistone destro sull'asse x, si risolve e si ottiene la forza del cuneo sul pistone

$$F_\mathrm{c} = \frac{Mmg \operatorname{sen} \alpha}{M \cos^2 \alpha + 2m \operatorname{sen}^2 \alpha} = 0.257\,\mathrm{N}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{0.256 \le F_\mathrm{c} \le 0.258 \quad [\,\mathrm{N}\,]}$

e la forza vincolare della guida sul pistone

$$F_\mathrm{g} = N = mg \left(\frac{M + 2m \operatorname{sen}^2 \alpha}{M \cos^2 \alpha + 2m \operatorname{sen}^2 \alpha} \right) = 1.995\,\mathrm{N}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.991 \le F_\mathrm{g} \le 1.999 \quad [\,\mathrm{N}\,]}$.

Quesito n. 4.

Si scrivono ancora le equazioni di moto del cuneo e del pistone e si impone la relazione dovuta al contatto tra pistone e cuneo.

Cuneo, asse y: $\quad Mg - 2F_\mathrm{p} \operatorname{sen} \alpha = M a_\mathrm{c}$

Pistone, asse x: $\quad F_\mathrm{c} \cos \alpha - kx = m\, a_\mathrm{p} \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{c} \cos \alpha - k \operatorname{tg} \alpha\, y = m \operatorname{tg} \alpha\, a_\mathrm{c}$

Ricavando F_c dalla seconda e sostituendo $F_\mathrm{p} = F_\mathrm{c}$ nella prima si ottiene

$$a_\mathrm{c} = \frac{Mg - 2k \operatorname{tg}^2 \alpha\, y}{M + 2m \operatorname{tg}^2 \alpha} = -\frac{2k \operatorname{tg}^2 \alpha}{M + 2m \operatorname{tg}^2 \alpha} \left(y - \frac{Mg}{2k \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)$$

che si può scrivere come

$$a_\mathrm{c} = -\omega^2 (y - y_\mathrm{c}) \quad \text{con} \quad \omega^2 = \frac{2k \operatorname{tg}^2 \alpha}{M + 2m \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \text{e} \quad y_\mathrm{c} = \frac{Mg}{2k \operatorname{tg}^2 \alpha}\,.$$

Questa è l'equazione di un oscillatore armonico con

$$\omega = \sqrt{\frac{2k \operatorname{tg}^2 \alpha}{M + 2m \operatorname{tg}^2 \alpha}} \qquad (1)$$

e centro di oscillazione nel punto di equilibrio delle forze, quindi per $a_\mathrm{c} = 0$, cioè per

$$y = y_\mathrm{c} = \frac{Mg}{2k \operatorname{tg}^2 \alpha}\,.$$

L'ampiezza dell'oscillazione è pari alla distanza del punto di partenza dal punto di equilibrio poiché il cuneo parte con velocità nulla:

$$A = \frac{Mg}{2k \operatorname{tg}^2 \alpha} = 17.7\,\mathrm{cm}\,. \qquad (2)$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{17.5 \le A \le 17.8 \quad [\,\mathrm{cm}\,]}$

Essendo $y(0) = 0$ la legge oraria del moto è

$y(t) = A\,(1 - \cos \omega t)$ dove A e ω sono date dalla (2) e dalla (1).

Il periodo delle oscillazioni è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M + 2m \operatorname{tg}^2 \alpha}{2k \operatorname{tg}^2 \alpha}} = 0.850\,\mathrm{s}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{0.846 \le T \le 0.853 \quad [\,\mathrm{s}\,]}$.

La velocità massima viene raggiunta nel punto di equilibrio ed è pari a

$$v_\mathrm{max} = \omega\, A = \frac{Mg}{\operatorname{tg} \alpha \sqrt{2k\,(M + 2m \operatorname{tg}^2 \alpha)}} = 1.308\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.302 \le v_\mathrm{max} \le 1.313 \quad [\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,]}$

SOLUZIONE ALTERNATIVA

Si può calcolare la velocità nel punto di equilibrio imponendo la conservazione dell'energia tra l'istante iniziale del moto e il punto di equilibrio.
L'energia potenziale del sistema è stata ricavata nella soluzione alternativa al punto 2:

$$U = k \operatorname{tg}^2 \alpha\, y^2 - Mg\, y\,.$$

Poiché l'energia potenziale è una funzione quadratica di y il moto del cuneo attorno al punto di equilibrio (punto di minimo dell'energia potenziale) è armonico.

L'energia cinetica è data dalla somma dei contributi del cuneo e dei pistoni. Tenendo conto che dalla relazione $x = y \operatorname{tg}\alpha$ si ricava che la velocità v_p del pistone è legata a quella v_c del cuneo dalla relazione $v_\mathrm{p} = v_\mathrm{c} \operatorname{tg}\alpha$, l'energia cinetica K del sistema risulta

$$K = \frac{1}{2} M v_\mathrm{c}^2 + 2\,\frac{1}{2}\, m \operatorname{tg}^2\alpha\, v_\mathrm{c}^2 \,.$$

Nella situazione iniziale $K_\mathrm{i} = 0$; nella situazione finale $v_\mathrm{c} = v_\mathrm{max}$. Pertanto la variazione risulta

$$\Delta K = \left(\frac{1}{2}\, M + m \operatorname{tg}^2\alpha\right) v_\mathrm{max}^2 \,.$$

Nella situazione iniziale $U_\mathrm{i} = 0$; nella situazione finale $y = Mg/(2k \operatorname{tg}^2\alpha)$. Pertanto la variazione risulta

$$\Delta U = U_\mathrm{f} = k \operatorname{tg}^2\alpha \frac{M^2g^2}{4k^2 \operatorname{tg}^4\alpha} - \frac{M^2g^2}{2k \operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{M^2g^2}{4k \operatorname{tg}^2\alpha}\,.$$

La condizione $\Delta K + \Delta U = 0$ si scrive allora

$$\left(\frac{1}{2}\, M + m \operatorname{tg}^2\alpha\right) v_\mathrm{max}^2 - \frac{M^2g^2}{4k \operatorname{tg}^2\alpha} = 0 \quad \text{da cui}$$

$$v_\mathrm{max} = \frac{Mg}{\operatorname{tg}\alpha \sqrt{2k\,(M + 2m \operatorname{tg}^2\alpha)}}\,.$$

L'ampiezza A è data sempre dalla (2). Il periodo risulta quindi

$$T = \frac{2\pi A}{v_\mathrm{max}} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M + 2m \operatorname{tg}^2\alpha}{2k \operatorname{tg}^2\alpha}}\,.$$

PROBLEMA n. 2 – Trasformazione termodinamica

Quesito n. 1.

Poiché l'adiabatica CA è reversibile, vale la relazione

$$p_\mathrm{C}\, V_\mathrm{C}^\gamma = p_\mathrm{A}\, V_\mathrm{A}^\gamma \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_V}\,.$$

Trattandosi di un gas biatomico, $c_V = 5R/2$ e $c_p = 7R/2$, per cui $\gamma = 7/5$; inoltre poiché $V_\mathrm{C} = V_\mathrm{B}$ risulta:

$$p_\mathrm{C} = p_\mathrm{A}\left(\frac{V_\mathrm{A}}{V_\mathrm{C}}\right)^\gamma = k^{7/5}\, p_\mathrm{A}\,.$$

Quesito n. 2.

Il sistema assorbe calore nel riscaldamento isocoro BC e cede calore nella compressione isobara AB; nella trasformazione adiabatica CA, per definizione, lo scambio di calore è nullo: $Q_\mathrm{CA} = 0$.

Il calore assorbito è

$$Q_\mathrm{BC} = n\, c_V\, \Delta T = \frac{5}{2} nR\, \Delta T\,.$$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricava che, a volume costante, $nR\,\Delta T = V\,\Delta p$, per cui

$$Q_\mathrm{BC} = \frac{5}{2} V_\mathrm{B}(p_\mathrm{C} - p_\mathrm{B}) = \frac{5}{2}\frac{V_\mathrm{A}}{k}(k^{7/5}\, p_\mathrm{A} - p_\mathrm{A}) = \frac{5}{2k}(k^{7/5} - 1)\, V_\mathrm{A}\, p_\mathrm{A}\,.$$

Analogamente

$$Q_\mathrm{AB} = n\, c_p\, \Delta T = \frac{7}{2} nR\, \Delta T\,.$$

A pressione costante, sempre dall'equazione di stato, si ottiene $nR\,\Delta T = p\,\Delta V$, dunque

$$Q_\mathrm{AB} = \frac{7}{2}(V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A})\, p_\mathrm{A} = \frac{7}{2}\left(\frac{V_\mathrm{A}}{k} - V_\mathrm{A}\right) p_\mathrm{A} = -\frac{7}{2k}(k-1) V_\mathrm{A}\, p_\mathrm{A}\,.$$

In un ciclo chiuso la variazione di energia interna ΔU è nulla e dunque, per il primo principio, il lavoro netto compiuto dal gas è pari al calore scambiato; il rendimento η è quindi

$$\eta = \frac{\mathcal{L}_\mathrm{netto}}{Q_\mathrm{ass}} = \frac{Q_\mathrm{AB} + Q_\mathrm{BC}}{Q_\mathrm{BC}} = 1 + \frac{Q_\mathrm{AB}}{Q_\mathrm{BC}} = 1 - \frac{7(k-1)}{5\,(k^{7/5} - 1)}\,. \qquad (1)$$

Quesito n. 3.

Si deve risolvere l'equazione

$$\eta(k) = 1 - \frac{7(k-1)}{5\,(k^{7/5}-1)} = 0.24\,.$$

Si può cominciare scegliendo i primi valori interi di k e calcolare per questi il valore di η, cercando di avvicinarci al valore al secondo membro.

k	η
2	0.15
3	0.23
4	0.30

k	η	intervallo
3.50	0.267	$3.00 < \overline{k} < 3.50$
3.25	0.251	$3.00 < \overline{k} < 3.25$
3.13	0.243	$3.00 < \overline{k} < 3.13$
3.06	0.238	$3.06 < \overline{k} < 3.13$

Il valore cercato di k, sia $\overline{k}$, è dunque compreso tra 3 e 4. Si prosegue con il metodo di bisezione (*), calcolando η per $k = 3.5$ e poi di seguito, come nella tabella seguente, dove i valori vengono arrotondati alla seconda cifra decimale.

In conclusione, scegliendo $\overline{k} = 3.08$ l'errore è sicuramente inferiore a 0.05.

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{3.03 \le \overline{k} \le 3.13}$

Quesito n. 4.

Per le trasformazioni reversibili la variazione infinitesima di entropia, dS, è pari al rapporto tra la quantità infinitesima di calore scambiato, dQ, e la temperatura assoluta del sistema, T: $dS = dQ/T$. Ne segue che l'entropia del sistema aumenta quando esso assorbe calore e diminuisce quando lo cede; inoltre ne segue che nelle adiabatiche reversibili l'entropia del sistema è costante.

Nel ciclo considerato il sistema cede calore nella compressione isobara AB e lo assorbe nel riscaldamento isocoro BC. Dunque l'entropia diminuisce da A a B, aumenta da B a C e resta costante nell'adiabatica CA. L'entropia massima si avrà dunque in tutta l'adiabatica CA, quella minima nello stato B. La differenza può essere calcolata ad esempio sulla trasformazione isocora BC

$$S_{\max} - S_{\min} = \Delta S_{\mathrm{BC}} = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \frac{dQ}{T} = \frac{5}{2}\int_{p_{\mathrm{B}}}^{p_{\mathrm{C}}} \frac{V\,dp}{pV/(nR)} = \frac{5}{2}nR\int_{p_{\mathrm{B}}}^{p_{\mathrm{C}}} \frac{dp}{p} = \frac{5}{2}nR\ln\left(\frac{p_{\mathrm{C}}}{p_{\mathrm{A}}}\right) = \frac{5}{2}nR\ln\left(k^{7/5}\right) = \frac{7}{2}nR\ln k$$

oppure, seguendo l'isobara BA

$$S_{\max} - S_{\min} = \Delta S_{\mathrm{BA}} = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \frac{dQ}{T} = \frac{7}{2}\int_{V_{\mathrm{B}}}^{V_{\mathrm{A}}} \frac{p\,dV}{pV/(nR)} = \frac{7}{2}nR\int_{V_{\mathrm{B}}}^{V_{\mathrm{A}}} \frac{dV}{V} = \frac{7}{2}nR\ln\left(\frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}}\right) = \frac{7}{2}nR\ln k\,.$$

In alternativa, la differenza di entropia può essere ricavata dall'espressione generale valida per un gas perfetto

$$S_{\max} - S_{\min} = S_{\mathrm{C}} - S_{\mathrm{B}} = n\,c_V\,\ln\left(\frac{p_{\mathrm{C}}\,V_{\mathrm{C}}^{\gamma}}{p_{\mathrm{B}}\,V_{\mathrm{B}}^{\gamma}}\right) = \frac{5}{2}R\,n\,\ln\left(\frac{p_{\mathrm{C}}}{p_{\mathrm{A}}}\right)\,.$$

Si perviene quindi allo stesso risultato.

PROBLEMA n. 3 – Allargamento Doppler

Quesito n. 1.

Dalla relazione $<v^2> = <v_x^2 + v_y^2 + v_z^2> = <v_x^2> + <v_y^2> + <v_z^2>$ e dal fatto che, per simmetria,

$<v_x^2> = <v_y^2> = <v_z^2>$ si ricava che

$<v_x^2> = \frac{1}{3} <v^2>$ per cui

$$v_{x,\mathrm{qm}} = \sqrt{<v_x^2>} = \sqrt{\frac{kT}{m}} = 351.6\ \mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{351.2 \le v_{x,\mathrm{qm}} \le 351.9\quad [\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,]}$

(*) O altro metodo numerico correttamente utilizzato.

Quesito n. 2.

Seguendo l'interpretazione della funzione di distribuzione $h(v_x)$ data nel testo, la grandezza

$$F_{(v_1,v_2)} = \int_{v_1}^{v_2} h(v_x)\, dv_x$$

rappresenta la frazione di atomi con velocità v_x compresa tra v_1 e v_2; di conseguenza considerando l'insieme di tutti gli atomi che hanno velocità qualunque, cioè compresa tra $-\infty$ e $+\infty$, deve essere

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} h(v_x)\, dv_x = 1 \quad \text{e la funzione di distribuzione si dice normalizzata.}$$

Nel nostro caso, poiché $h(v_x)$ è zero se $|v_x| > v_0$, e costante (sia h_u la costante) se $|v_x| \le v_0$, si avrà

$$F = \int_{-v_0}^{+v_0} h_\mathrm{u}\, dv_x = 1 \quad \text{da cui si ricava immediatamente} \quad F = 2v_0 h_\mathrm{u} = 1 \quad \Rightarrow \quad h_\mathrm{u} = \frac{1}{2v_0}\,.$$

Quesito n. 3.

Per quanto detto nel testo, con questa distribuzione di velocità il valore medio di v_x^2 è

$$< v_x^2 > = \frac{1}{2v_0} \int_{-v_0}^{+v_0} v_x^2\, dv_x = \frac{1}{2v_0}\, \frac{2}{3} v_0^3 = \frac{1}{3}\, v_0^2 \quad \text{e quindi} \quad v_{x,\mathrm{qm}} = \sqrt{< v_x^2 >} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, v_0\,.$$

Se si vuole che questo valore sia uguale a quello trovato al punto 1, dev'essere

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\, v_0 = \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = v_\mathrm{qm}\,.$$

Dunque l'intervallo richiesto è

$$\Delta v_x = 2\, v_0 = 2\sqrt{\frac{3kT}{m}} = 2\, v_\mathrm{qm} = 1217.9\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,. \qquad \textsf{RIS} \quad \Rightarrow \quad \boxed{1216.7 \le \Delta v_x \le 1219.1 \quad [\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,]}$$

Quesito n. 4.

L'osservatore è fermo e la sorgente (l'atomo) in moto con v_x, quindi l'effetto Doppler (non relativistico) in frequenza è dato da

$$f = f_0\, \frac{c}{c - v_x}$$

con c velocità della luce e v_x velocità dell'atomo. Ovvero

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{v_x}{c}\right)\,. \tag{1}$$

Quindi, poiché l'intervallo di velocità è compreso tra $-v_0$ e $+v_0$, si ha che

$$\Delta\lambda = \lambda_\mathrm{max} - \lambda_\mathrm{min} = \lambda(-v_0) - \lambda(v_0) = 2\, \frac{\lambda_0\, v_0}{c} = 2.571\,\mathrm{pm}\,. \qquad \textsf{RIS} \quad \Rightarrow \quad \boxed{2.568 \le \Delta\lambda \le 2.573 \quad [\,\mathrm{pm}\,]}$$

Quesito n. 5.

Per ricavare la frazione di fotoni in un intervallo di lunghezze d'onda di ampiezza $d\lambda$ occorre imporre che tale frazione sia uguale quella di atomi che hanno velocità nel corrispondente intervallo di ampiezza dv_x.

Invertendo la (1) si ricava v_x in funzione di λ ottenendo

$$v_x = c\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) \quad \text{ed anche} \quad dv_x = -\frac{c}{\lambda_0}\, d\lambda\,.$$

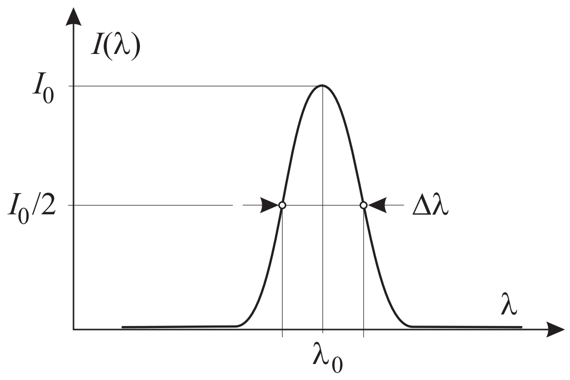
Occorre osservare che il segno meno, dovuto semplicemente al fatto che la funzione $v_x(\lambda)$ è decrescente, fa sì che l'intervallo $[v_x, v_x + dv_x]$ sia trasformato nell'intervallo $[\lambda, \lambda - d\lambda]$; allora, sostituendo nella legge di Maxwell-Boltzmann e imponendo, per quanto sopra, che sia $h(v_x)\, dv_x = I(\lambda)\,(-d\lambda)$, si determina la distribuzione $I(\lambda)$ (*)

(*) Il valore della costante h_0 si determina, come nel caso della distribuzione uniforme, imponendo che la distribuzione di Maxwell-Boltzmann sia normalizzata, cioè che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(v_x)\, dv_x = 1\,. \quad \text{Si ottiene:} \quad h_0 = \sqrt{\frac{m}{2\pi\, kT}}\,.$$

$$I(\lambda) = \frac{c\,h_0}{\lambda_0}\,\exp\left(-\frac{mc^2\,(1-\lambda/\lambda_0)^2}{2kT}\right).$$

Il grafico è rappresentato in figura, dove $I_0 = c\,h_0/\lambda_0$.



Quesito n. 6.

Per calcolare l'ampiezza $\Delta\lambda$ dell'intervallo delle lunghezze d'onda emesse dal laser si considera la larghezza della curva a metà altezza. I valori λ' sono quelli per cui

$$\exp\left(-\frac{mc^2\,(1-\lambda'/\lambda_0)^2}{2kT}\right) = \frac{1}{2}$$

da cui, prendendo il logaritmo, si ricava

$$\frac{mc^2\,(1-\lambda'/\lambda_0)^2}{2kT} = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda' = \lambda_0 \mp \frac{\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2kT\,\ln 2}{m}}\,.$$

Infine

$$\Delta\lambda' = \lambda'_2 - \lambda'_1 = \frac{2\,\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2kT\,\ln 2}{m}} = 1.748\,\mathrm{pm}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.746 \le \Delta\lambda \le 1.749 \quad [\,\mathrm{pm}\,]}$

SOLUZIONE ALTERNATIVA

La larghezza $\Delta\lambda'$ della riga può essere calcolata anche senza ricavare l'espressione di $I(\lambda)$, osservando (v. la (1) e la sua inversa) che la relazione tra v_x e λ è lineare e quindi può essere considerata la composizione di una traslazione sull'asse delle ascisse e di un cambiamento di scala delle ordinate. Entrambe queste trasformazioni lasciano invariata la forma della funzione, e quindi l'ampiezza $\Delta\lambda'$ può essere ricavata semplicemente dalla larghezza a metà altezza della distribuzione $h(v_x)$ ed operando dopo la sostituzione in λ.

Nella distribuzione di M-B la velocità a mezza altezza è

$$v_{1/2} = \sqrt{\frac{2kT\,\ln 2}{m}}\,. \quad \Rightarrow \quad \Delta v_x = 2\,v_{1/2}$$

Applicando la stessa formula vista per la distribuzione piatta (in fondo alla soluzione del quesito 4) si trova

$$\Delta\lambda' = \frac{\lambda_0}{c}\,\Delta v_x = \frac{2\,\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2kT\,\ln 2}{m}}\,.$$

In conclusione si può osservare che, rispetto al modello corretto di Maxwell-Boltzmann, quello estremamente semplificato di una distribuzione uniforme di velocità degli atomi fornisce, per l'allargamento della riga laser, un risultato dello stesso ordine di grandezza.

PROBLEMA n. 4 – Spira triangolare

Quesito n. 1.

Fin quando il punto P non arriva in O ($t \le 0$) non c'è variazione di flusso concatenato con la spira quindi la f.e.m. indotta e la corrente sono nulle.

Per $0 \le x \le \ell$, cioè mentre la spira sta entrando nella regione di campo magnetico non nullo, il flusso varia. Si scelga di orientare la superficie piana racchiusa dalla spira in modo concorde al campo magnetico; in questo modo l'angolo tra $\vec{B}$ e il versore normale alla superficie della spira è 0 e il flusso risulta positivo e pari a

$$\Phi(x) = B\,x^2\,.$$

Derivando rispetto al tempo e cambiando segno si ottiene la f.e.m. indotta

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi[x(t)]}{dt} = -\frac{d\Phi(x)}{dx}\,\frac{dx(t)}{dt} = -2B\,x\,v$$

per cui la corrente indotta, proporzionale alla fem, risulta

$$i = -\frac{2B\,x\,v}{R} \quad \text{per} \quad 0 \le t \le \ell/v_0\,. \qquad (1)$$

Nel caso particolare di moto uniforme, la velocità è costante ($v(t) = v_0$) e $x(t) = v_0\,t$ per cui

$$\mathcal{E}(t) = -2B\,v_0^2\,t \quad \text{e}$$

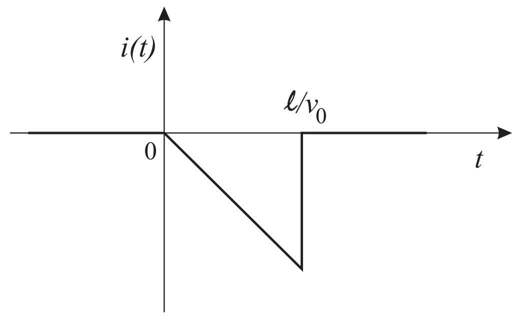
$$i(t) = -\frac{2B\,v_0^2}{R}\,t \quad \text{sempre per} \quad 0 \le t \le \ell/v_0\,.$$

Allo stesso risultato si può arrivare direttamente se la legge oraria è assegnata, come in questo caso in cui la spira si muove di moto uniforme; sostituendo $x(t) = v_0\,t$ il flusso si scrive

$$\Phi(t) = B\,v_0^2\,t^2 \quad \text{da cui} \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -2B\,v_0^2\,t\,.$$

Si osserva che avendo orientato la superficie racchiusa dalla spira in senso concorde al campo magnetico, per la regola della mano destra, si è implicitamente orientato il verso di percorrenza della spira in senso antiorario. Il segno negativo della corrente dice allora che la corrente indotta circola in verso orario. Successivamente ($t > \ell/v_0$) il flusso rimane costante e quindi la f.e.m. e la corrente sono nuovamente nulle.

L'andamento di $i(t)$ è mostrato in figura.



Quesito n. 2.

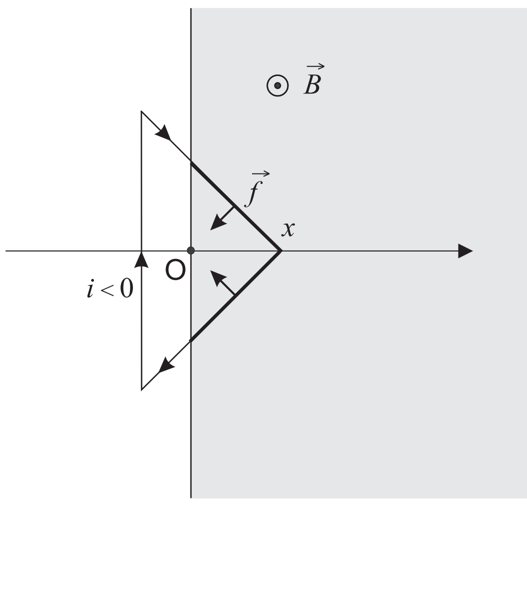
La corrente indotta determina una forza magnetica che si oppone al moto.

In una posizione generica della spira nella fase in cui entra nel campo magnetico (cioè per $0 \le x \le \ell$, mostrata in figura), la corrente è data, come si visto, dall'equazione (1) che può essere espressa come funzione di x quando si conosca la velocità come $v(x)$. In questo caso, essendo $v = v_0$ costante si avrà semplicemente

$$i(x) = -\frac{2B\,v_0\,x}{R}$$

mentre la forza magnetica è applicata solo sui tratti immersi nel campo magnetico, di lunghezza $\sqrt{2}\,x$. Poiché la corrente scorre in verso orario (come si può ricavare anche dalla legge di Lenz) per ognuno di questi due tratti la forza è rivolta verso l'interno della spira e ha modulo

$$f = |i(x)|\;(\sqrt{2}\,x)\,B\,.$$



Chiamando f_x la componente lungo x di ciascuna delle due forze applicate ai due tratti immersi nel campo magnetico, la forza magnetica risultante $\vec{F}_\mathrm{m}$ applicata alla spira avrà solo la componente x pari a

$$F_m = 2f_x = -\sqrt{2}\,f = -\sqrt{2}\;|i(x)|\;(\sqrt{2}\,x)\,B = -2B\,i(x)\,x\,. \qquad (2)$$

Sostituendo la $i(x)$ trovata sopra si ha

$$F_m = -4\frac{B^2\,v_0\,x^2}{R}\,.$$

La forza esterna $\vec{F}$ deve equilibrare questa forza frenante ed è perciò ad essa opposta ma uguale in modulo.

Il lavoro è pari all'integrale della forza esterna tra 0 e ℓ

$$\mathcal{L} = \int_0^\ell F\,dx = \frac{4}{3}\frac{B^2 v_0 \ell^3}{R}\,.$$

Quesito n. 3.

L'energia è dissipata per effetto Joule solo nell'intervallo di tempo tra $t = 0$ e $t = \ell/v_0$ ed è pari a

$$U_\mathrm{J} = \int_0^{\ell/v_0} W(t)\,dt = \int_0^{\ell/v_0} Ri^2(t)\,dt = \int_0^{\ell/v_0} \frac{4B^2\,v_0^4}{R}\,t^2\,dt = \frac{4}{3}\frac{B^2 v_0 \ell^3}{R}\,.$$

che coincide con il lavoro calcolato prima. Questo significa che, in un bilancio energetico globale, essendo l'energia cinetica costante, l'energia trasferita dalla forze esterna alla spira viene convertita per effetto Joule in energia termica.

Più precisamente, in presenza del campo magnetico, la forza di Lorentz agente sulle cariche in moto converte l'energia meccanica della spira in energia elettrica del circuito, compiendo un lavoro netto nullo; contemporaneamente questa energia elettrica viene convertita in energia termica a causa della resistenza del conduttore. È per questo che, per mantenere costante la velocità – e l'energia cinetica – della spira, occorre rifornire il sistema di energia meccanica attraverso il lavoro della forza esterna.

Quesito n. 4.

Sulla base di quanto visto sopra, in assenza della forza esterna, l'effetto Joule avviene in definitiva a spese dell'energia meccanica della spira: in questo caso l'energia cinetica viene convertita in energia interna (termica). Il fenomeno inverso, cioè la conversione di energia termica in energia cinetica non può avvenire spontaneamente; pertanto, qualora la spira si fermasse, esaurita l'energia cinetica, rimarrebbe ferma senza poter tornare indietro.

Alternativamente, analizzando la dinamica del sistema, si è visto che il modulo della forza magnetica (che in questo caso è anche la forza risultante) è direttamente proporzionale a quello della velocità. Poiché quest'ultima è inizialmente positiva, per continuità non può diventare negativa se non annullandosi in un certo istante; ma se questo succede anche la forza magnetica si annulla: la spira rimane ferma e non può ritornare indietro.

In sostanza, i casi possibili sono due: o la spira si ferma prima di essere entrata completamente nel campo magnetico, e in tal caso resta ferma, oppure riesce ad entrare completamente nel campo prima di aver dissipato tutta la sua energia cinetica, e da quel momento prosegue di moto uniforme, essendo venuta meno la forza magnetica.

Quesito n. 5.

Per $t = 0$ si ha $v = v_0$. Derivando l'espressione di $v[x(t)]$ rispetto al tempo si ottiene l'accelerazione

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt} = -4\,\frac{B^2\,x^2(t)\,v(t)}{R\,m} \quad \text{da cui} \quad -\,4\,\frac{B^2\,x^2\,v}{R} = m\,a$$

che rappresenta l'equazione di moto in quanto a primo membro compare l'espressione della forza magnetica, già ottenuta al punto 2.

Quesito n. 6.

Nella fase in cui la spira entra nel campo magnetico essa rallenta a causa della forza magnetica; solo se la velocità iniziale è sufficientemente grande, maggiore di una velocità iniziale critica v_cr, la spira riuscirà ad entrare completamente e successivamente si muoverà di moto uniforme, passando per il punto $x = 2\ell$.

Utilizzando l'espressione di v data nel testo occorre imporre che sia $v > 0$ per $x = \ell$, ovvero

$$v_0 - \frac{4B^2}{3Rm}\,\ell^3 > 0 \quad\Rightarrow\quad v_0 > \frac{4B^2}{3Rm}\,\ell^3 = v_\mathrm{cr}\,.$$

In termini di energia, l'energia U_J dissipata per effetto Joule avviene a spese dell'energia cinetica iniziale K della spira, per cui $U_\mathrm{J} = -\Delta K$; dunque l'energia dissipata corrisponde, a parte il segno, alla variazione di energia cinetica che, a sua volta, è uguale al lavoro della forza magnetica.

Il calcolo può essere fatto, in linea di principio, in tre modi diversi: direttamente, integrando la potenza dissipata $W_\mathrm{J} = i^2(t)\,R$ nell'intervallo di tempo in cui la spira entra nel campo magnetico; calcolando la differenza di energia cinetica tra un istante in cui la spira è fuori dal campo magnetico e uno in cui è completamente dentro; calcolando il lavoro fatto dalla forza magnetica come integrale

$$\mathcal{L} = \int F_\mathrm{m}(x)\,dx\,.$$

Il primo modo non è praticabile perché richiede l'espressione della corrente in funzione del tempo che si può ottenere solo avendo la $x(t)$, cioè risolvendo esplicitamente l'equazione di moto.

Nel secondo modo si ha

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(v_0 - \frac{4B^2}{3Rm}\,\ell^3\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{4B^2\ell^3}{3R}\left(v_0 - \frac{2B^2\ell^3}{3Rm}\right)$$

per cui

$$U_\mathrm{J} = \frac{4B^2\ell^3}{3R}\left(v_0 - \frac{2B^2\ell^3}{3Rm}\right)\,.$$

Infine, nel terzo modo, per avere l'espressione della forza magnetica in funzione di x occorre sostituire l'equazione (1) della corrente nell'equazione (2) della forza, usando poi l'espressione della $v(x)$ data nel testo; si determina così

$$F_\mathrm{m} = -2B\,i(x)\,x = -\frac{4B^2}{R}x^2\,v(x) = -\frac{4B^2}{R}x^2\left(v_0 - \frac{4B^2\,x^3}{3Rm}\right)$$

da cui

$$\mathcal{L} = \int_0^\ell F(x)\,dx = -\frac{4B^2}{R}\int_0^\ell\left(v_0x^2 - \frac{4B^2}{3Rm}x^5\right)dx = -\frac{4B^2}{R}\left(\frac{v_0\ell^3}{3} - \frac{2B^2}{9Rm}\ell^6\right)$$

ottenendo nuovamente

$$U_\mathrm{J} = -\mathcal{L} = \frac{4B^2\ell^3}{3R}\left(v_0 - \frac{2B^2\ell^3}{3Rm}\right)\,.$$

Materiale elaborato dal Gruppo

PROGETTO OLIMPIADI

Segreteria delle Olimpiadi Italiane di Fisica

e-mail: **segreteria@olifis.it**

WEB: **www.olifis.it**