Il Principio Variazionale

(Punteggio Totale: 10)

A Il Principio Variazionale in Meccanica

Considera il piano orizzontale *x*-*y* privo di attrito della Fig. 1. È diviso in due regioni, I and II, da una linea AB di equazione $x = x_1$. L'energia potenziale di una particella puntiforme di massa m è $V = 0$ nella regione I, mentre è $V = V_0$ nella regione II. La particella è lanciata con velocità v_1 dall'origine O, in una direzione che forma l'angolo θ_1 con l'asse x. Essa raggiunge un punto P nella regione II, viaggiando in essa con una velocità v_2 secondo una direzione che forma l'angolo θ_2 con l'asse x. In tutto T-2 (in tutte le parti del problema) trascura la gravità e gli effetti relativistici.

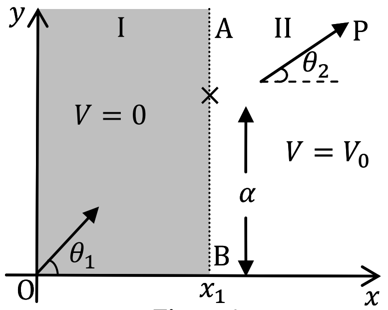


Figura 1

A1	Ricava un'espressione di v_2 in funzione di m, v_1 e V_0.	**0.2**
A2	Esprimi v_2 in funzione di v_1, θ_1 e θ_2.	**0.3**

Si definisce una grandezza $A = m\int v(s)ds$, chiamata azione; ds rappresenta uno spostamento infinitesimo lungo la traiettoria per una particella di massa m, in moto con velocità $v(s)$ e l'integrale si intende esteso al cammino. Per esempio, nel caso di una particella in moto lungo un percorso circolare di raggio R, con velocità di modulo costante v, l'azione A per un giro è $2\pi mRv$. Per una particella di energia costante E, si può dimostrare che, fra tutte le possibili traiettorie tra due punti dati, la traiettoria effettiva è quella in cui la grandezza A definita sopra assume un valore estremo (minimo oppure massimo). Storicamente, questo caso è noto come Principio di Minima Azione (PMA).

A3	Dal PMA si deduce che la traiettoria di una particella in moto tra due punti dati in una regione con potenziale costante deve essere rettilinea. Supponiamo che i due punti fissi O e P della Fig. 1 abbiano rispettivamente coordinate $(0,0)$ e (x_0, y_0); il punto di confine nel quale la particella passa dalla regione I alla regione II abbia coordinate (x_1, α). Osserva che x_1 è fisso e che l'azione dipende soltanto dalla coordinata α. Ricava l'espressione dell'azione $A(\alpha)$. Usa il PMA per ricavare la relazione tra v_1/v_2 e queste coordinate.	**1.0**

B Il Principio Variazionale in Ottica

Un raggio di luce passa da un mezzo I a un mezzo II con indici di rifrazione rispettivamente n_1 e n_2. I due mezzi sono separati da una linea parallela all'asse x. Il raggio di luce forma un angolo i_1 con l'asse y nel mezzo I e un angolo i_2 nel mezzo II (vedi Fig. 2). Per ottenere la traiettoria del raggio, faremo uso di un altro principio variazionale (di minimo o massimo), noto come principio di Fermat del tempo minimo.

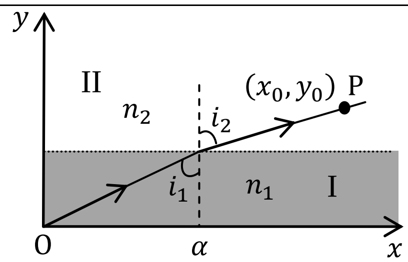


Figura 2

B1	Il principio stabilisce che, tra due punti dati, un raggio luminoso si muove lungo un cammino tale che il tempo impiegato tra i due punti risulti un estremo. In base al principio di Fermat, ricava la relazione tra $\sin i_1$ e $\sin i_2$.	**0.5**

Nella Fig. 3 è disegnato schematicamente il percorso di un raggio laser che incide orizzontalmente su una soluzione di zucchero, nella quale la concentrazione dello zucchero decresce con l'altezza. Di conseguenza, anche l'indice di rifrazione della soluzione decresce con l'altezza.

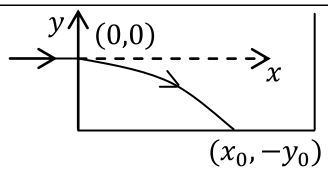


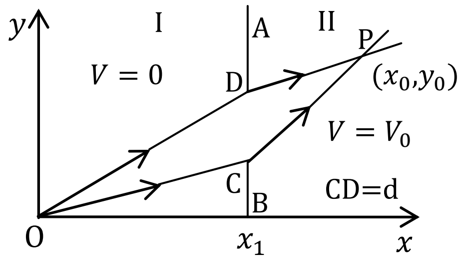
Figura 3: Vaschetta con soluzione di zucchero

B2	Supponi che l'indice di rifrazione $n(y)$ dipenda soltanto da y. Usa l'equazione ottenuta in B1 per ricavare l'espressione della pendenza dy/dx del cammino del raggio in funzione dell'indice di rifrazione n_0, corrispondente a $y = 0$, e di $n(y)$.	**1.5**
B3	Il fascio laser parte dall'origine $(0,0)$ in direzione orizzontale ed entra nella soluzione zuccherina a un'altezza y_0 dal fondo della vaschetta, come si vede nella figura 3. Poni $n(y) = n_0 - ky$, dove n_0 e k sono costanti positive. Per la traiettoria effettiva del fascio laser, ricava un'espressione di x in funzione di y	**1.2**

	e delle grandezze associate. Puoi usare la relazione: $\int \sec\theta d\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + \text{costante}$, dove $\sec\theta = 1/\cos\theta$ oppure la relazione: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \text{costante}$	
B4	Ricava il valore di x_0, il punto in cui il fascio luminoso tocca il fondo della vaschetta. Poni $y_0 = 10.0$ cm, $n_0 = 1.50$, $k = 0.050\ \text{cm}^{-1}$ (1 cm = 10^{-2} m).	**0.8**

C Il Principio Variazionale e la Natura Ondulatoria della Materia

Esploreremo ora il rapporto tra il PMA e la natura ondulatoria di una particella in moto. A questo scopo, ammettiamo che una particella che si muova O a P possa percorrere tutte le possibili traiettorie e cerchiamo una traiettoria che sia il risultato dall'interferenza costruttiva tra le onde di de Broglie.

C1	Posto che una particella descriva un tratto infinitesimale Δs della sua traiettoria, esprimi la variazione $\Delta\varphi$ della fase della sua onda di de Broglie in funzione della variazione ΔA dell'azione e della costante di Planck.	**0.6**
C2	Riprendi il problema della Parte A in cui la particella passa da O a P (vedi Fig. 4). Supponiamo di porre una separazione opaca al confine AB tra le due regioni. In AB è presente una piccola apertura CD, di larghezza d, tale che $d \ll (x_0 - x_1)$ e $d \ll x_1$. Considera due cammini estremi OCP e ODP, in modo che OCP giaccia sulla traiettoria classica discussa nella parte A. Ricava la differenza di fase $\Delta\varphi_{CD}$ tra i due cammini, al primo ordine di approssimazione.  **Figura 4**	**1.2**

D Interferenza delle Onde Materiali

Considera un cannone elettronico collocato in O, che invia un fascio collimato di elettroni su una stretta fenditura F; questa è ricavata nella separazione opaca A_1B_1 in una posizione $x = x_1$ così che OFP risulti un percorso rettilineo. P è un punto sullo schermo in $x = x_0$ (vedi Fig. 5). La velocità in I è $v_1 = 2.0000 \times 10^7\ \text{m s}^{-1}$ e si ha $\theta = 10.0000^\circ$. Il potenziale in II è tale che la velocità v_2 risulti $v_2 = 1.9900 \times 10^7\ \text{m s}^{-1}$. La distanza $x_0 - x_1$ è di 250.00 mm (1mm = 10^{-3}m). Trascura l'interazione elettrone-elettrone.

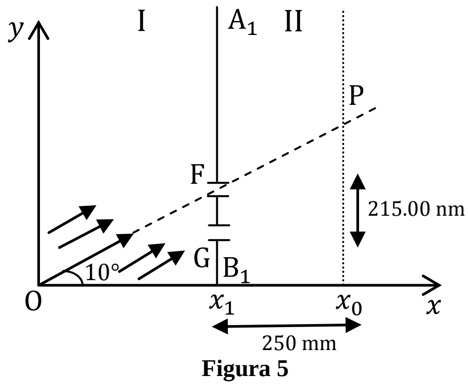


Figura 5

D1	Supponendo che gli elettroni in O siano stati accelerati da fermi, calcola il potenziale acceleratore U_1.	**0.3**
D2	Nella separazione A_1B_1 si ricava una seconda fenditura identica a una distanza di 215.00 nm (1 nm = 10^{-9} m) al di sotto della fenditura F (Fig. 5). Indicando con $2\pi\beta$ la differenza di fase tra le onde di de Broglie che arrivano nel punto P attraverso le due fenditure F e G, calcola β.	**0.8**
D3	Qual è la minima distanza Δy da P per la quale ci si attende di trovare un valore nullo (zero) nella rivelazione degli elettroni sullo schermo? [Nota: può risultarti utile l'approssimazione $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \sin\theta + \Delta\theta\cos\theta$].	**1.2**
D4	Il fascio ha una sezione trasversale quadrata di 500 nm × 500 nm e l'apparato ha una lunghezza di 2 m. Quale deve essere la minima densità di flusso I_{min} (numero di elettroni per unità di area normale e per unità di tempo) affinché in qualunque istante si abbia, in media, almeno un elettrone nell'apparato?	**0.4**