Particelle dal Sole

(Punteggio tot.: 10)

I fotoni provenienti dalla superficie del Sole e i neutrini provenienti dal suo nucleo ci danno informazioni sulle temperature solari e confermano che il Sole brilla grazie a reazioni nucleari.

In tutto questo problema, assumi $M_{\odot} = 2.00 \times 10^{30}$ kg per la massa del Sole, $R_{\odot} = 7.00 \times 10^{8}$ m per il suo raggio, $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{26}$ W per la sua luminosità (rapporto tra energia radiante emessa e tempo di emissione) e $d_{\odot} = 1.50 \times 10^{11}$ m per la distanza Terra-Sole.

Osserva che:

(i) $\int xe^{ax}dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax} +$ costante

(ii) $\int x^2e^{ax}dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)e^{ax} +$ costante

(iii) $\int x^3e^{ax}dx = \left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4}\right)e^{ax} +$ costante

A Radiazione proveniente dal Sole :

A1	Supponi che il Sole emetta radiazione come un corpo nero perfetto. Da questo calcola la temperatura T_{s} della superficie solare.	**0.3**

Lo spettro della radiazione solare si può approssimare bene attraverso la distribuzione di Wien. Secondo questa legge, l'energia solare incidente su una superficie posta sulla Terra, per unità di tempo e per unità di frequenza, $u(\nu)$, è data da

$$u(\nu) = A\frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2}\frac{2\pi h}{c^2}\nu^3\exp(-h\nu/k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{s}}),$$

dove ν indica la frequenza e A è l'area della superficie normale alla direzione della radiazione incidente.

Considera ora una cella solare, costituita da un disco sottile di materiale semiconduttore di area A, disposto perpendicolarmente alla direzione dei raggi provenienti dal Sole.

A2	Usando l'approssimazione di Wien, esprimi la potenza radiante solare totale incidente sulla superficie della cella solare, P_{in}, in funzione di A, $R_{\odot}$, $d_{\odot}$, T_{s} e delle costanti fondamentali c, h, k_{B}.	**0.3**
A3	Esprimi il numero di fotoni che incidono sulla superficie della cella solare, per unità di tempo e per unità di intervallo di frequenza, $n_{\gamma}(\nu)$, in funzione di A, $R_{\odot}$, $d_{\odot}$, T_{s}, ν e delle costanti fondamentali c, h, k_{B}.	**0.2**

Il materiale semiconduttore della cella solare ha una banda proibita di energia E_{g}. Assumiamo il modello seguente: ogni fotone di energia $E \geq E_{\mathrm{g}}$ eccita un elettrone, facendogli attraversare la banda proibita di energia. Dell'energia assorbita dall'elettrone, una quantità E_{g} viene utilizzata in uscita mentre il resto viene dissipato termicamente (non è convertito in energia utile).

A4	Poni $x_{\mathrm{g}} = h\nu_{\mathrm{g}}/k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{s}}$ dove $E_{\mathrm{g}} = h\nu_{\mathrm{g}}$. Esprimi la potenza utilizzata in uscita dalla cella, P_{out}, in funzione di x_{g}, A, $R_{\odot}$, $d_{\odot}$, T_{s} e delle costanti fondamentali c, h, k_{B}.	**1.0**
A5	Esprimi il rendimento η di questa cella solare in funzione di x_{g}.	**0.2**
A6	Disegna un grafico qualitativo dell'andamento di η in funzione di x_{g}. I valori assunti per $x_{\mathrm{g}} = 0$ e per $x_{\mathrm{g}} \to \infty$ devono essere mostrati con chiarezza. Qual è la pendenza di $\eta(x_{\mathrm{g}})$ per $x_{\mathrm{g}} = 0$ e per $x_{\mathrm{g}} \to \infty$?	**1.0**
A7	Sia x_0 il valore di x_{g} per il quale η risulta massimo. Ricava l'equazione cubica che fornisce x_0. Determina un valore approssimato di x_0 con un'accuratezza di ± 0.25. Da questo valore calcola $\eta(x_0)$.	**1.0**
A8	La banda proibita del silicio puro è $E_{\mathrm{g}} = 1.11$ eV. Usando questo valore, calcola il rendimento η_{Si} di una cella solare di silicio.	**0.2**

Alla fine del diciannovesimo secolo, Kelvin ed Helmholtz (KH) proposero un'ipotesi per spiegare come il Sole potesse splendere. Fecero l'ipotesi che a partire da una grande nube di materia di massa $M_{\odot}$ e di densità trascurabile, il Sole avesse iniziato a contrarsi con continuità. Lo splendore del Sole sarebbe così dovuto alla liberazione di energia potenziale gravitazionale corrispondente a questa lenta contrazione.

A9	Supponiamo che all'interno del Sole la densità della materia sia uniforme. Trova l'energia potenziale gravitazionale totale del Sole oggi, Ω, in funzione di G, $M_\odot$ and $R_\odot$.	**0.3**
A10	Stima (in anni) il tempo massimo τ_{KH} in cui il Sole potrebbe aver brillato, secondo l'ipotesi di KH e ammettendo che la luminosità del Sole sia rimasta costante in tutto questo periodo.	**0.5**

Il tempo τ_{KH} calcolato sopra non è in accordo con l'età del sistema solare ricavata dallo studio dei meteoriti. Ciò mostra che la fonte di energia del Sole non può essere puramente gravitazionale.

B Neutrini dal Sole:

Nel 1938, Hans Bethe suggerì che un processo di fusione nucleare dell'idrogeno in elio nel nucleo del Sole potesse essere la fonte della sua energia. La reazione nucleare complessiva è:

$$4\,{}^{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{4}\mathrm{He} + 2\mathrm{e}^{+} + 2\nu_{\mathrm{e}}$$

I "neutrini elettronici" ν_{e} prodotti in questa reazione possono essere ritenuti privi di massa. Essi sfuggono dal Sole e la loro rivelazione sulla Terra conferma la presenza di reazioni nucleari all'interno del Sole. In questo problema può essere trascurata l'energia trasportata dai neutrini.

B1	Calcola la densità del flusso di neutrini in arrivo sulla Terra, Φ_ν, in unità $\mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$. L'energia liberata nella reazione scritta sopra è $\Delta E = 4.0 \times 10^{-12}$J. Supponi che l'energia irradiata dal Sole sia dovuta unicamente a questa reazione.	**0.6**

Durante il viaggio dal nucleo del Sole alla Terra, alcuni neutrini elettronici ν_e si trasformano in altri tipi di neutrino ν_{x}. Il rendimento del rivelatore per i neutrini ν_{x} è 1/6 di quello che si ha per i neutrini ν_{e}. In assenza di conversione tra i neutrini, ci si aspetterebbe di rivelare una media di N_1 neutrini all'anno; invece, per via della conversione, si rivela in realtà una media di N_2 neutrini (ν_{e} e ν_{x} sommati insieme) all'anno.

B2	In funzione di N_1 e di N_2, calcola la frazione f dei neutrini ν_{e} che si converte in ν_{x}.	**0.4**

Per rivelare i neutrini si costruiscono grossi rivelatori riempiti d'acqua. Benché le interazioni dei neutrini con la materia siano molto rare, di quando in quando riescono ad espellere qualche elettrone dalle molecole d'acqua del rivelatore. Questi elettroni energetici si muovono ad alta velocità nell'acqua, in un processo nel quale emettono radiazione elettromagnetica. Finché la velocità di questi elettroni è maggiore della velocità della luce nell'acqua (che ha indice di rifrazione n), si ha questa emissione caratterizzata da una forma conica, detta radiazione Cherenkov.

B3	Supponi che un elettrone, rimosso da un neutrino, attraversando l'acqua perda energia ad un ritmo costante α, che è il rapporto tra l'energia persa e il corrispondente tempo di frenamento. Supponendo che questo elettrone emetta radiazione Cherenkov per un tempo Δt, determina l'energia ceduta a questo elettrone dal neutrino (E_{ceduta}), in funzione di α, Δt, n, m_{e} e c. (Considera l'elettrone a riposo prima dell'interazione con il neutrino.)	**2.0**

La fusione di H in He all'interno del Sole si sviluppa in più processi con diversi stadi. In uno di questi stadi intermedi si produce un nucleo di ${}^{7}\mathrm{Be}$ (avente massa a riposo m_{Be}). Successivamente, questo nucleo può assorbire un elettrone, dando luogo a un nucleo di ${}^{7}\mathrm{Li}$ (massa a riposo $m_{\mathrm{Li}} < m_{\mathrm{Be}}$) con l'emissione di un ν_{e}. La reazione nucleare corrispondente è:

$${}^{7}\mathrm{Be} + \mathrm{e}^{-} \longrightarrow {}^{7}\mathrm{Li} + \nu_{\mathrm{e}}$$

Se un nucleo di Be ($m_{\mathrm{Be}} = 11.65 \times 10^{-27}$ kg) è fermo e assorbe un elettrone anch'esso fermo, il neutrino emesso ha energia $E_\nu = 1.44 \times 10^{-13}$ J. Ma i nuclei di Be sono in moto termico casuale a causa della temperatura T_{c} presente nel nucleo del Sole, e si comportano come sorgenti in moto nell'emissione dei neutrini. Pertanto l'energia dei neutrini emessi fluttua, con uno scarto quadratico medio (rms) ΔE_{rms}.

B4	Se $\Delta E_{rms} = 5.54 \times 10^{-17}$J , calcola la velocità quadratica media V_{Be} dei nuclei di Be, e da questa ricava una stima di T_{c}. (Suggerimento: ΔE_{rms} dipende dal valore quadratico medio del componente della velocità lungo la direzione di osservazione).	**2.0**