La materia oscura

La prima ipotesi teorica dell'esistenza della materia oscura fu avanzata da Fritz Zwicky sulla base della sua osservazione della dinamica dell'ammasso di galassie Coma, un ammasso composto da circa un migliaio di galassie.

Zwicky utilizzò il teorema del viriale per stimare la massa dell'ammasso di galassie.

In un sistema più semplice, quello pianeta-sole, composto da un pianeta che orbita intorno ad una stella in un'orbita circolare, il teorema del viriale afferma che l'energia cinetica e potenziale del pianeta sono legate in maniera semplice ed esatta. Nel caso generale, per un sistema composto da molte particelle confinate a causa della rispettiva interazione, il teorema del viriale mette in relazione la media temporale dell'energia cinetica totale, con la media temporale dell'energia potenziale totale.

Nel 1933, sulla base delle sue misure della velocità delle galassie vicino al bordo dell'ammasso di galassie Coma, Zwicky stimò che l'ammasso avrebbe dovuto avere una massa maggiore di quella visibile (cioè quella delle galassie). L'attrazione gravitazionale proveniente dalla materia visibile (le galassie) era troppo picola per rendere conto della velocità delle galassie. Perciò doveva essere presente della massa nascosta per rendere conto di una velocità così alta. Questa massa non visibile costituisce la materia oscura. Nel seguito, si assuma che la massa di ciascuna galassia sia la somma della sua massa visibile e della massa della materia oscura che si muove insieme a quella galassia, e che la materia oscura interagisce con la materia visibile soltanto in maniera gravitazionale.

A. Un ammasso di galassie

Considera un ammasso di galassie che consista di un gran numero N di galassie e di materia oscura distribuite in una sfera omogenea di raggio R e sia M la massa totale dell'ammasso (galassie e materia oscura). Assumi che la massa totale media di una galassia (visibile e materia oscura) sia m.

A.1	Supponendo una distribuzione uniforme della materia nell'ammasso, trova l'energia potenziale gravitazionale dell'ammasso come funzione di M ed R.	1.0 pt.

A causa dell'espansione cosmologica, un oggetto a qualunque distanza da un osservatore sulla Terra si allontana da esso con una velocità che dipende dalla distanza. Una data frequenza di Lyman (cioè una linea dello spettro di emissione dell'idrogeno) proveniente da una supernova di tipo IA sulla i-esima galassia nell'ammasso risulta essere f_i, con $i = 1 \ldots N$, mentre la stessa frequenza di Lyman, misurata sulla Terra risulta essere f_0.

A.2	Determina la velocità media V_{cr} dell'intero ammasso di galassie in allontanemento dalla Terra come funzione di f_i (con $i = 1 \ldots N$), f_0 e N. Supponi che la velocità delle galassie sia molto piccola in rapporto alla velocità della luce c.	0.5 pt.

A.3	Supponendo che la velocità delle galassie rispetto al centro dell'ammasso siano distribuite in maniera isotropa (cioè siano uguali in tutte le direzioni), determina la velocità quadratica media delle galassie v_{rms} rispetto al centro dell'ammasso in funzione di N, f_i (con $i = 1, \ldots, N$) e f_0. Utilizzando questo risultato trova l'energia cinetica media di una galassia rispetto al centro dell'ammasso in funzione di v_{rms} ed m.	1.5 pt.

Per trovare la massa totale dell'ammasso si può utilizzare il teorema del viriale. Questo teorema dimostra che per un sistema di particelle che si attraggono con una forza conservativa,

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

dove $\langle K \rangle_t$ è la media temporale dell'energia cinetica totale, $\langle U \rangle_t$ è la media temporale dell'energia potenziale totale e γ è una costante.

Questo teorema può essere dimostrato assumendo che per un sistema di particelle legate a causa della loro attrazione reciproca, i moduli dei vettori posizione e quantità di moto di ciascuna posizione sono finiti e perciò la quantità

$$\Gamma = \sum_i \vec{p_i} \cdot \vec{r_i}$$

è finita.

A.4	Sfruttando il fatto che la media temporale calcolata per un intervallo di tempo sufficientemente lungo $d\Gamma/dt$ si annulla, $\langle \frac{d\Gamma}{dt} \rangle_t = 0$, determina γ per il teorema del viriale precedentemente enunciato, nel caso dell'interazione gravitazionale. (Suggerimento: cerca di risolvere il problema sommando in Γ per un numero piccolo di galassie).	1.7 pt.
A.5	Utilizzando i risultati precedenti determina la massa totale della materia oscura dell'ammasso come funzione di N, m_g, R e v_{rms}, dove m_g è la massa visibile totale media della galassia. Nota che la velocità quadratica media della materia oscura è la stessa di quella delle galassie.	0.5 pt.

B. La materia oscura in una galassia

La materia oscura è presente anche all'interno di una galassia e al di fuori di essa. Considera una galassia sferica con un raggio visibile R_g (esso è approssimativamente definito come la distanza più esterna dentro la quale è visibile la magior parte delle stelle, ma ricorda che al di fuori di questo raggio R_g possono essere ancora presenti alcune stelle). Assumi che tutte le stelle nella galassia siano puntiformi e che abbiano la stessa massa media m_S. Le stelle sono distribuite nella galassia omogeneamente, hanno una densità numerica n e si suppone che si muovano su un'orbita circolare.

B.1	Se la galassia fosse composta esclusivamente da stelle, trova la velocità $v(r)$ di una stella in funzione della sua distanza dal centro della galassia e disegna $v(r)$ per $r < R_g$ e $r \geq R_g$.	0.8 pt.

L'esistenza della materia oscura può essere ipotizzata dalla curva di rotazione della galassia, che è un grafico di $v(r)$ ottenuto dalle osservazioni sperimentali. La figura riportata sotto mostra uno schema comune di una curva di rotazione della galassia. Assumi per semplicità che $v(r)$ sia un funzione lineare per $r < R_g$ e costante con valore v_0 per $r \geq R_g$.

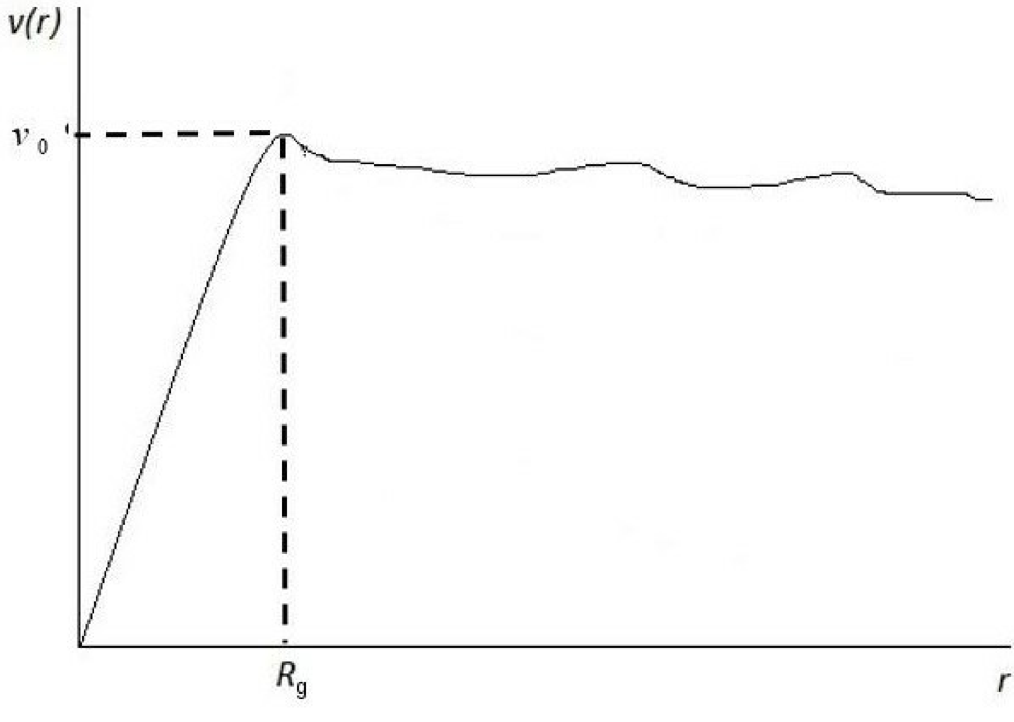

Fig. 1 Grafico della curva di rotazione di una galassia.

B.2	Trova la massa totale m_R di quella parte della galassia che si trova all'interno della sfera di raggio R_g in funzione di v_0 e R_g.	0.5 pt.

La discrepanza tra la figura in B.2 e il grafico ottenuto in B.1 fanno supporre l'esistenza della materia oscura.

B.3	Determina la densità di massa della materia oscura come funzione di r, R_g, v_0, n e m_S per $r < R_g$ e per $r \geq R_g$.	1.5 pt.

C. Gas interstellare e materia oscura

Considera ora una galassia giovane la cui massa è composta prevalentemente da gas interstellare e materia oscura (trascura la massa delle stelle). Il gas interstellare è composto da particelle identiche di massa m_p. La densità numerica $n(r)$ e la temperatura $T(r)$ del gas dipendono dalla distanza r dal centro della galassia. Sebbene nel gas abbiano luogo molti processi fisici, si può assumere che il gas sia in un equilibrio idrostatico causato dalla sua pressione e dall'attrazione gravitazionale della galassia.

C.1	Determina il gradiente di pressione del gas dP/dr, in funzione di $m'(r)$, r e $n(r)$. Qui $m'(r)$ è la massa totale di gas e materia oscura all'interno di una sfera di raggio r misurato dal centro della galassia.	0.5 pt.

C.2	Assumendo che il gas interstellare sia un gas perfetto, trova $m'(r)$ in funzione di $n(r)$, $T(r)$ e delle loro derivate rispetto ad r.	0.5 pt.

Si assuma ora per semplicità che il gas si trovi in una distribuzione isoterma alla temperatura T_0 e che la densità numerica del gas interstellare sia data dalla formula

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2}$$

dove α e β sono delle costanti.

C.3	Trova la densità di massa della materia oscura come funzione di r all'interno della galassia.	1.0 pt.