Inflazione cosmica

A causa del moto relativo delle galassie osservato dalla Terra, la lunghezza d'onda dello spettro visibile di una galassia è diverso da quello emesso dalla galassia: questo fenomeno è noto come effetto doppler della luce. Per un ammasso di galassie ci si aspetta che lo spostamento dello spettro abbia una distribuzione casuale: alcune galassie che mostrano uno spostamento della luce verso il rosso (spostamento positivo dello spettro), altre che mostrano uno spostamento della luce verso il blu (spostamento negativo dello spettro della luce).

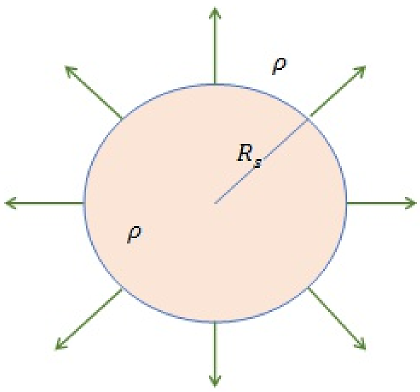
L'osservazione, però, mostra che tutte le galassie, tranne alcune che si trovano più vicine alla nostra, hanno lo spettro spostato verso il rosso. Ciò è vero da qualunque parte dell'universo vengano effettuate le osservazioni.

In conclusione, l'universo deve essere in espansione.

D'altra parte, le irregolarità locali dell'universo si possono trascurare, su una scala più grande di 100 Mpc, in cui 1 pc = 3.26 anni-luce. Facendo una media su larga scala, la distribuzione delle galassie diventa sempre più isotropa (cioè non dipende dalla direzione di osservazione) e omogenea (cioè indipendente dalla posizione).

Quindi si può assumere che l'Unviverso: 1) abbia una densità uniforme ρ e 2) che si sta espandendo.

A. Espansione dell'Universo



Come semplice modello di universo, si consideri una sfera di densità uniforme che si espande e che è immersa in un mezzo infinito con la stessa densità. Sia R_s il raggio della sfera ad un certo istante di tempo. Per esprimere come la sfera si sta espandendo, si deve definire la dipendenza dal tempo del raggio $R(t)$ attraverso un fattore moltiplicativo $a(t)$ in modo che sia $R(t) = a(t)R_s$.

Usando la legge di gravità di Newton per valutare la velocità di un elemento di massa sul bordo della sfera secondo il nostro modello di universo, si ottiene un insieme di equazioni riportate qui sotto:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1\rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \tag{1}$$

dove k è una costante adimensionale e c è la velocità della luce.

A.1	Calcola la costante A_1 presente nell'equazione (1)	1.3 punti

La discussione fino a questo punto non è relativistica. Ma, in effetti, si può estendere anche a sistemi relativistici, reinterpretando $\rho(t)c^2$ come la densità di energia totale (escludendo l'energia potenziale gravitazionale). In questo sistema relativistico si ricava la seconda equazione di Friedmann:

$$\dot{\rho} + A_2\left(\rho + \left(\frac{p}{c^2}\right)\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \tag{2}$$

adoperando la prima legge della termodinamica per un sistema adiabatico, dove p indica la pressione sulla sfera.

A.2	Calcola la costante A_2 nell'equazione (2)	0.9 punti

Per risolvere le Eq. (1) e (2), si dovrebbe assumere una relazione per la funzione $p = p(\rho)$, tale che $p(t)/c^2 = w\rho(t)$, con w costante.

Interviene anche un altro fattore $H = \dot{a}/a$, chiamato costante di Hubble.

Il valore attuale dei parametri viene di solito contrassegnato col pedice 0 per cui si ha t_0, ρ_0, H_0, a_0 e così via. Per semplicità si prenda $a_0 = 1$.

Si ritiene che l'Universo abbia avuto origine, da una grande eplosione chiamata Big Bang, che ha prodotto una emissione di particelle relativistiche. Durane la sua espansione, l'Universo si sta raffreddando e le particelle sono diventate non relativistiche.

Tuttavia le osservazioni più recenti hanno confermato che l'Universo attuale è governato dalla densità di energia cosmologica costante. Nel caso del fotone, mentre l'Universo si espande, la lunghezza d'onda del fotone aumenta proporzionalmente con lo stesso fattore di scala

A.3	In ciascuno dei tre casi seguenti calcola il valore di w: (i) l'universo è riempito solo di radiazione elettromagnetica (cioè l'energia dei fotoni), (ii) l'universo è riempito di materia non-relatvistica e (iii) l'universo a denistà di energa costante.	1.2 punti
A.4	Nel caso in cui sia $k = 0$, trova $a(t)$ per ciascun caso da (i) a (iii) trattati nella domanda A.3. Usa la condizione iniziale $a(t = 0) = 0$ nei casi (i) e (ii), e la condizione iniziale $a_0 = 1$ nel caso (iii).	1.2 pt.

La costante k nell'Eq. (1) si riferisce alla classificazione della geometria spaziale dell'Universo. Il suo valore può essere assunto uguale a $k = +1$ per un universo a curvatura positiva (cioè chiuso), $k = 0$ per un universo piatto (infinito) e $k = -1$ per un universo a curvatura negativa (universo aperto, infinito). Si definisca il rapporto di densità $\Omega = \rho/\rho_c$, dove $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ è la densità di energia critica. Prendi nota che A_1 è quello della domanda A.1.

A.5	Esprimi k dell'Eq. (1) in termini di Ω, H, a e R_0.	0.1 punti
A.6	Trova l'intervallo di valori di Ω che corrisponde a ciascun valore di $k = +1$, $k = 0$ e $k = -1$.	0.3 punti

B. La motivazione per introdurre la fase d'inflazione e le sue condizioni generali

L'osservazione delle microonde cosmiche della radiazione di fondo (CMB) suggerisce che il nostro universo attuale sia approssimativamente piatto. Se questo è vero allora l'universo attuale dovrebbe essere cominciato da un universo completamente piatto, altrimenti ogni eventuale deviazione dalla forma piana sarebbe aumentata nel tempo distruggendo l'attuale forma piatta.

B.1	Trova $(\Omega(t) - 1)$ in funzione del tempo sia che l'universo si trovi nel dominio della radiazione sia che si trovi nel dominio della materia non relativistica (vedi domanda A.3).	0.4 punti

La contraddizione precedente si risolve se l'Universo nei suoi primi istanti sottosta per un periodo di tempo ad un regime in cui la densità di energia è costante e questo comporta un'espansione esponenziale, cosiddetta periodo di inflazione.

B.2	Per il periodo in cui predomina la densità di energia costante, trova $(\Omega(t) - 1)$ in funzione del tempo. Assumi che $(\Omega(t) - 1) \ll 1$.	0.3 pt.

B.3	Fa' vedere, dimostra, che la condizione per l'inflazione implica molte condizioni, ovvero: una pressione negativa, un'espansione accelerata $(\ddot{a} > 0)$ e un raggio di Hubble decrescente $(d(aH) - 1/dt < 0)$	0.9 punti
B.4	Fa' vedere, dimostra, che la condizione per cui il raggio di Hubble è decrescente si può esprimere in termini del parametro $\varepsilon = \frac{\dot{H}}{H^2}$ con la condizione $\varepsilon < 1$.	0.2 punti

L'inflazione dura finché $\varepsilon < 1$ e cessa quando $\varepsilon = 1$. Si può definire il numero di e-folding, N, tale che $dN = d \ln a = Hdt$ con $N = 0$ al termine dell'inflazione.

C. Inflazione generata da una distribuzione omogenea di particelle

Un esempio di un semplice sistema fisico che può dare origine a un periodo d'inflazione è il caso di un universo dominato da una distribuzione omogenea di materia. Questo tipo di materia viene chiamato inflatone ed è caratterizzato da una funzione $\phi(t)$.

L'equazione della dinamica di questa materie si può esprimere nel modo seguente

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (3)$$

dove $V = V(\phi)$ è una funzione potenziale e $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$. La costante di Hubble soddisfa la condizione seguente

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right]. \quad (4)$$

dove M_{pl} rappresenta una costante chiamata massa ridotta di Planck. Il periodo di inflazione avviene quando l'energia potenziale V predomina sull'energia cinetica $\dot{\phi}^2/2$ per un tempo così lungo tale per cui il termine $\ddot{\phi}$ si possa trascurare nell'equazione (3). Questa condizione si chiama approssimazione di "slow-roll".

Le quantità ϵ e $\eta_V = \delta + \epsilon$, dove $\delta = -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$, sono chiamate parametri di "slow-roll"

C.1	Stima i parametri $\epsilon, \eta_V, dN/d\phi$ in funzione del potenziale $V(\phi)$ e delle sue derivate prima e seconda (V' and V'').	1.7 punti

D. Inflazione con un potenziale semplice

Le previsioni dedotte con qualunque modello inflattivo devono essere confrontate con i dati rilevati al CMB procedendo come segue. n_s = 0.968 $\pm$ 0.006 ed r < 0.12, dove $r = 16\epsilon$ and $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$ vengono valutate per $\phi = \phi_{start}$ per il modello inflattivo dove domina la materia. Assumi che il potenziale della materia sia del tipo $V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n$ dove n un intero qualunque Λ è una costante.

D.1	Calcola ϕ_{end} alla fine dell'inflazione.	0.5 punti
D.2	Esprimi r ed n_s in funzione del numero di e-folding N e dell'intero n. Stima il valore di n che approssima meglio i valori osservati di r ed n_s. Prendi per N il valore N = 60 per lo svogimento dei calcoli.	0.9 punti