

La fisica di un forno a microonde

In questo problema viene discussa la produzione di radiazione a microonde in un forno a microonde e il suo uso per il riscaldamento degli alimenti. Le microonde sono generate in un apparato chiamato "magnetron". La Parte A riguarda il funzionamento del magnetron mentre la parte B riguarda l'assorbimento della radiazione a microonde da parte degli alimenti.

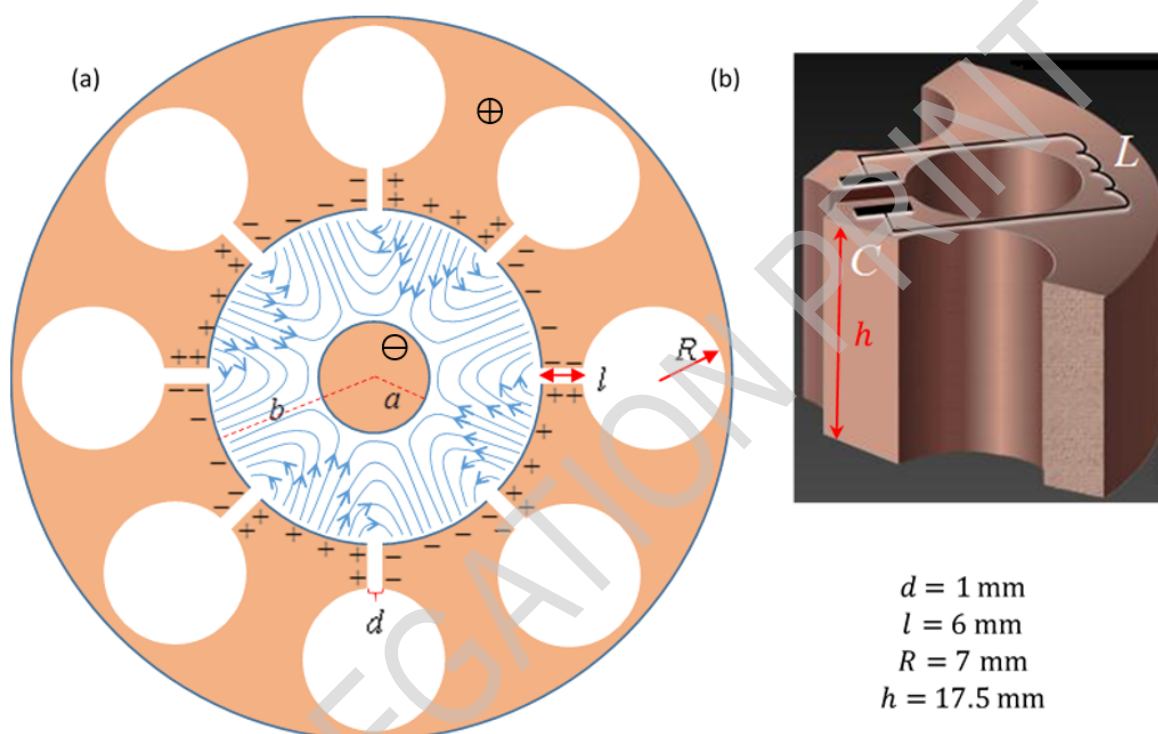


Figura 1

Parte A: La struttura e il funzionamento di un magnetron (6.6 punti)

Un magnetron è un apparato per la produzione di radiazione a microonde in forma pulsata (per applicazioni radar) o continua (per esempio, in un microonde). Un magnetron è dotato di modi risonanti in grado di amplificare le oscillazioni che produce. Applicando al magnetron una differenza di potenziale statica (non alternata) questi modi vengono rapidamente eccitati. La radiazione a microonde così prodotta viene trasmessa all'esterno dell'apparato.

Un tipico magnetron di un forno a microonde è composto da un catodo cilindrico di rame (di raggio a) e un anodo che lo circonda. Quest'ultimo ha la forma di uno spesso guscio cilindrico (di raggio interno b) nel quale sono ricavate delle cavità cilindriche, chiamate "risuonatori". Ciascuno di questi risuonatori è accoppiato ad un'antenna che trasmette all'esterno la radiazione elettromagnetica; nel seguito, si ignori la presenza delle antenne. Tutta la regione interna al magnetron è sotto vuoto. Si consideri un tipico magnetron con otto risuonatori, rappresentato in Figura 1(a). La struttura tridimensionale di un singolo risuonatore è mostrata in Figura 1(b). Come indicato in figura, ciascuna delle otto cavità si comporta come un circuito risonante induttivo-capacitivo (LC), con frequenza naturale $f = 2.45 \text{ GHz}$.

All'interno del magnetron, è presente un campo magnetico statico e uniforme diretto lungo l'asse dell'apparato e che punta verso l'esterno della pagina in Figura 1(a). Inoltre, è applicata una differenza di



potenziale statica tra l'anodo (polo positivo) e il catodo (polo negativo). Gli elettroni emessi dal catodo raggiungono l'anodo e lo caricano, eccitando modi di oscillazione in cui, su due superfici adiacenti che separano i risuonatori, sono presenti cariche di segno opposto. L'oscillazione nelle cavità amplifica queste oscillazioni.

Il processo appena descritto genera nella regione tra catodo e anodo un campo elettrico variabile periodicamente con la frequenza desiderata $f = 2.45$ GHz, in aggiunta al campo elettrico statico (il campo variabile è rappresentato ad un certo istante dalle linee blu nella Figura 1(a); il campo elettrico statico non è rappresentato). A regime, la tipica intensità del campo elettrico variabile nella regione tra anodo e catodo è circa $\frac{1}{3}$ del campo elettrico statico. Il moto di un elettrone nella regione tra catodo e anodo è influenzato sia dai campi statici che dal campo variabile periodicamente. Questo fa sì che gli elettroni che raggiungono l'anodo trasferiscono al campo variabile circa l'80% dell'energia acquistata grazie al campo statico. Una minoranza degli elettroni emessi dal catodo vi fa ritorno causando l'emissione di nuovi elettroni che vanno ad amplificare ulteriormente il campo variabile.

Come indicato in Figura 1(b), ciascun risuonatore può essere considerato come costituito da un condensatore e un induttore. La capacità del risuonatore è determinata principalmente dalla parte piana della sua superficie, mentre l'induttanza è determinata dalla parte cilindrica. Si assuma che la corrente nel risuonatore fluisca uniformemente sulla superficie della sua cavità cilindrica e che l'intensità del campo magnetico generato da tale corrente sia 0.6 volte quella di un solenoide infinito di pari raggio. Le varie grandezze che determinano la geometria del risuonatore sono fornite nella Figura 1(b). La permittività e la permeabilità del vuoto sono rispettivamente $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$.

- A.1** Si usino i dati forniti sopra per stimare la frequenza f_{est} di ciascun risuonatore. 0.4pt
(Il risultato potrebbe essere diverso dal valore reale $f = 2.45$ GHz. Nel seguito, si usi il valore **reale** della frequenza).

La domanda A.2 qui sotto non riguarda direttamente il magnetron ma permette di introdurre una parte della fisica rilevante per il problema in esame. Si consideri un elettrone che si muove nel vuoto in presenza di un campo elettrico uniforme diretto lungo l'asse negativo delle y , $\vec{E} = -E_0 \hat{y}$ e un campo magnetico uniforme diretto lungo l'asse positivo delle z , $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ (E_0 e B_0 sono grandezze positive; $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ sono vettori unitari orientati nella maniera usuale). Si indichi con $\vec{u}(t)$ la velocità dell'elettrone al tempo t . La velocità di deriva \vec{u}_D dell'elettrone è definita come la sua velocità media. Si indichino con m e $-e$ rispettivamente la massa e la carica dell'elettrone.

- A.2** In ciascuno dei due seguenti casi, si trovi \vec{u}_D . Inoltre, disegnare nel Foglio Risposte le traiettorie dell'elettrone (nel sistema di riferimento del laboratorio) nell'intervallo di tempo $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$: 1.5pt
1. al tempo $t = 0$ la velocità dell'elettrone è $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$,
 2. al tempo $t = 0$ la velocità dell'elettrone è $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$.

Riprendiamo ora l'analisi del magnetron. La distanza tra catodo e anodo è di 15 mm. Si assuma che, a causa della perdita di energia verso il campo variabile periodicamente, la massima energia cinetica degli elettroni non superi il valore $K_{\text{max}} = 800$ eV. L'intensità del campo magnetico statico è $B_0 = 0.3$ T. La massa e la carica dell'elettrone sono rispettivamente $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg e $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

- A.3** Si stimi numericamente il massimo raggio r della traiettoria dell'elettrone nel sistema di riferimento in cui essa è approssimativamente circolare, assumendo che tale sistema di riferimento sia approssimativamente inerziale. 0.4pt

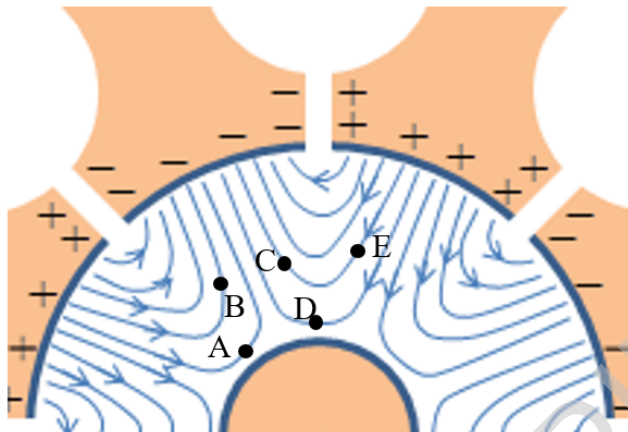


Figura 2

- A.4** La Figura 2 rappresenta le linee del campo elettrico variabile nella regione tra catodo e anodo ad un certo istante (il campo elettrico statico non è rappresentato). Nel Foglio Risposte, per gli elettroni posti nei punti A, B, C, D e E nell'istante rappresentato si indichi se la velocità di deriva è diretta verso il catodo, verso l'anodo o perpendicolarmente al raggio. 1.2pt

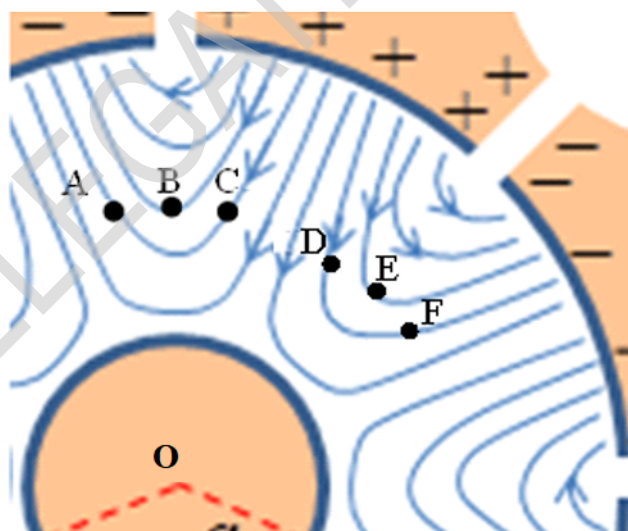


Figura 3

La Figura 3 rappresenta le linee del campo elettrico variabile nella regione tra catodo e anodo ad un certo istante (il campo elettrico statico non è rappresentato). La posizione di sei elettroni in quell'istante è indicata con A, B, C, D E e F. Tutti gli elettroni sono alla stessa distanza dal catodo.

- A.5** Si consideri la situazione mostrata in Figura 3. Per ciascuna delle sei coppie di elettroni AB, AC, BC, DE, DF, EF, si indichi sul foglio risposte se, nell'istante rappresentato, la velocità di deriva provoca una diminuzione o un aumento dell'angolo tra i loro vettori posizione (misurati a partire dal centro del catodo O). 1.2pt

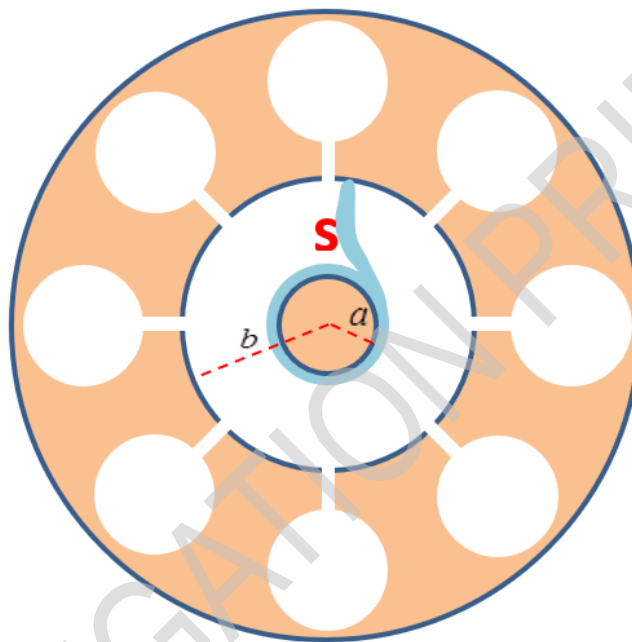


Figura 4

L'andamento evidenziato nella Domanda A.5 funziona come un meccanismo di messa a fuoco, concentrando in alcune lingue rotanti gli elettroni della regione interna dal magnetron. La Figura 4 rappresenta una di queste lingue, indicata con S.

- A.6** Nel Foglio Risposte, si rappresentino le altre lingue rotanti allo stesso istante. Si indichi con delle frecce la loro direzione di rotazione, e si calcoli la loro velocità angolare media ω_s . 0.8pt

Si consideri l'approssimazione in cui il campo elettrico totale nei punti a metà distanza tra catodo e anodo è pari al valore medio del campo elettrico statico tra catodo e anodo lungo una direzione radiale. Si consideri inoltre che le lingue rotanti in cui sono concentrati gli elettroni siano approssimativamente radiali in tali punti. In Figura 4 sono rappresentati anche il raggio del catodo e il raggio interno dell'anodo (rispettivamente a e b).

- A.7** Si trovi un'espressione approssimata per la tensione statica V_0 necessaria a far funzionare il magnetron nella maniera descritta (l'espressione ottenuta fornirà un'approssimazione del valore minimo necessario per il funzionamento del magnetron; la tensione ottimale è leggermente superiore). 1.1pt

Parte B: L'interazione della radiazione a microonde con le molecole d'acqua (3.4 punti)

Questa parte riguarda l'uso della radiazione a microonde (irradiata dall'antenna del magnetron nel forno) per riscaldare un materiale dielettrico dispersivo come l'acqua, pura o salata (che è un nostro modello per una zuppa).

Un dipolo elettrico è una configurazione di due cariche elettriche uguali e opposte q e $-q$ situate a una piccola distanza d l'una dall'altra. Il vettore di dipolo elettrico va dalla carica negativa a quella positiva e la sua ampiezza è $p = qd$.

Un campo elettrico dipendente dal tempo, $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$, viene applicato a un dipolo singolo avente momento $\vec{p}(t)$ e intensità costante $p_0 = |\vec{p}(t)|$. L'angolo tra il dipolo e il campo elettrico è $\theta(t)$.

- B.1** Scrivere le espressioni dell'intensità della coppia $\tau(t)$ applicata dal campo elettrico al dipolo e della potenza $H_i(t)$ trasmessa dal campo al dipolo, in funzione di p_0 , $E(t)$, $\theta(t)$ e delle loro derivate. 0.5pt

Le molecole d'acqua sono polari, e possono essere trattate come dipoli elettrici. A causa dei forti legami a idrogeno fra le molecole d'acqua, allo stato liquido, non è possibile trattarle come dipoli indipendenti. Piuttosto, si dovrebbe fare riferimento al vettore di polarizzazione $\vec{P}(t)$, che è la densità del momento di dipolo (cioè il momento di dipolo medio per unità di volume di un insieme di molecole d'acqua). La polarizzazione $\vec{P}(t)$ è un vettore parallelo al campo elettrico locale variabile della radiazione a microonde, $\vec{E}(t)$, e oscilla nel tempo con un'ampiezza che è proporzionale all'ampiezza del campo elettrico locale, ma con un ritardo di fase δ .

Il campo elettrico variabile locale in una determinata posizione all'interno dell'acqua è $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t)\hat{x}$, dove $\omega = 2\pi f$, dando origine alla polarizzazione $\vec{P}(t) = \beta \epsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta)\hat{x}$. La costante adimensionale β è una proprietà dell'acqua.

- B.2** Trovare un'espressione per la potenza media per unità di volume $\langle H(t) \rangle$ che è stata assorbita dall'acqua. La media temporale per una variabile periodica $f(t)$ che dipende dal tempo in un periodo T viene definita da 0.5pt

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

Si consideri la propagazione della radiazione in acqua. La costante dielettrica relativa dell'acqua (ad una determinata frequenza della radiazione elettromagnetica) è ϵ_r e il corrispondente indice di rifrazione dell'acqua è $n = \sqrt{\epsilon_r}$. La densità di energia istantanea del campo elettrico è data da $\frac{1}{2}\epsilon_r\epsilon_0 E^2$. In un periodo, la densità di energia media del campo elettrico e del campo magnetico sono uguali.

- B.3** Si indichi con $I(z)$ l'irradiamento (potenza media trasferita dalla radiazione elettromagnetica per unità di area). Qui z è la profondità di penetrazione in acqua quando la radiazione si propaga nella direzione z . Trovare un'espressione per $I(z)$ in funzione di z . Tale espressione può contenere l'irradiamento sulla superficie dell'acqua $I(0)$. 1.1pt

La differenza di fase δ è il risultato dell'interazione tra le molecole d'acqua. Essa dipende dal coefficiente adimensionale di dispersione dielettrica ϵ_ℓ e dalla costante dielettrica relativa ϵ_r tramite la relazione

$\tan \delta = \varepsilon_\ell / \varepsilon_r$. Entrambe le grandezze ε_ℓ e ε_r dipendono dalla pulsazione ω e dalla temperatura. Quando δ è sufficientemente piccolo, la profondità di penetrazione z in acqua del campo elettrico è data da:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta} \sin(n k_0 z - \omega t) \quad (2)$$

dove $k_0 = \omega/c$ e $c = 3.0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ è la velocità della luce nel vuoto.

B.4 Si consideri l'approssimazione in cui $\tan \delta \approx \sin \delta$ e si trovi un'espressione per il coefficiente β , definito nella Domanda B.2, in termini degli altri parametri. 0.6pt

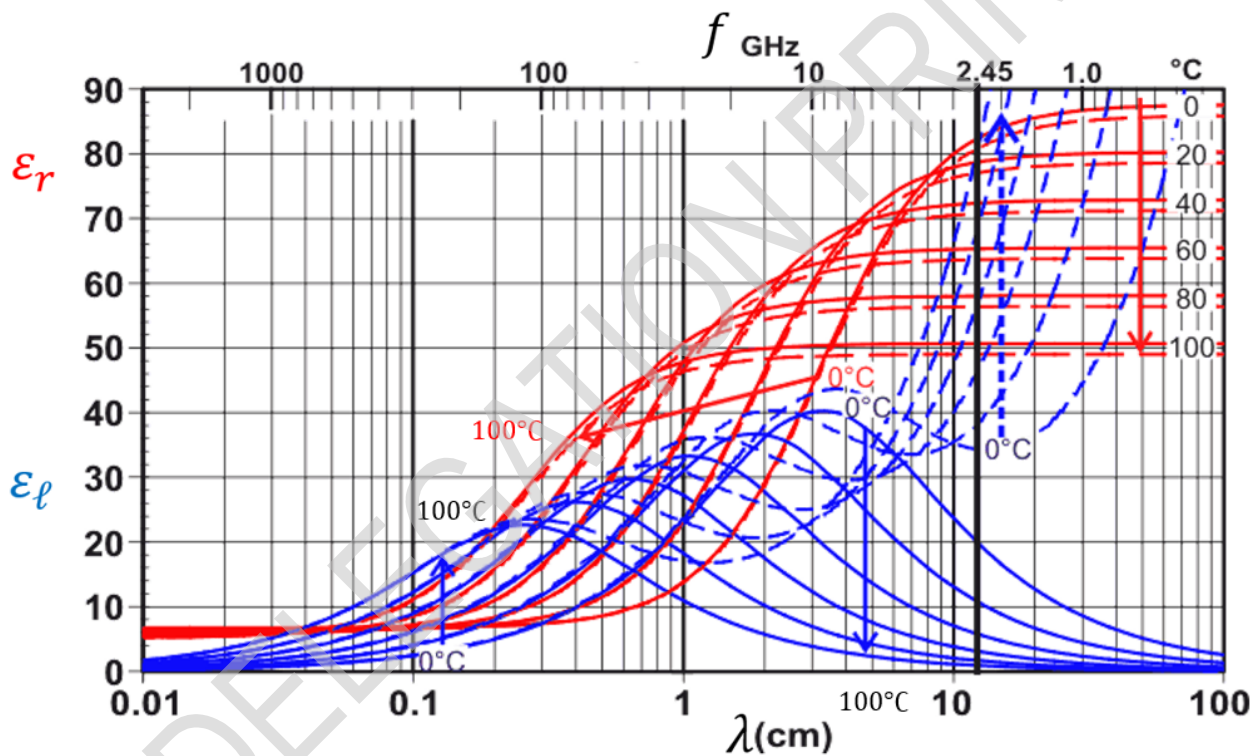


Figura 5. Le frecce rappresentano la variazione della temperatura nelle varie curve da 0°C a 100°C.

La Figura 5 rappresenta ε_ℓ (in blu) e ε_r (in rosso) per l'acqua distillata (linee continue) e una soluzione di acqua e sale (linee tratteggiate) in funzione della lunghezza d'onda o della frequenza del campo elettrico per diverse temperature. La radiazione che corrisponde alla pulsazione $\omega = 2\pi \cdot 2.45 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ è indicata da una linea verticale più spessa. Nel seguito si considerino solo microonde di tale frequenza.



B.5 Si usi la Figura 5 per rispondere alle seguenti domande:

0.7pt

1. Per l'acqua distillata a 20°C , si trovi la profondità di penetrazione $z_{1/2}$ alla quale la potenza trasmessa per unità di volume è ridotta alla metà del suo valore a $z = 0$.
2. Si indichi sul Foglio Risposte se la profondità di penetrazione della radiazione a microonde in acqua distillata aumenta, diminuisce o resta invariata al variare della temperatura.
3. Si indichi sul Foglio Risposte se la profondità di penetrazione delle microonde nella zuppa (soluzione di acqua e sale) aumenta, diminuisce o rimane invariata al variare della temperatura.

DELEGATION PRINT