



Particelle e onde (10 punti)

Uno dei concetti centrali della meccanica quantistica afferma che ogni particella può essere descritta come un'onda e viceversa. In questo problema, faremo affidamento su questa nozione e solo su alcuni altri presupposti di base per esplorare una selezione di fenomeni quantistici che coprono i due distinti tipi di particelle del micromondo: fermioni e bosoni.

Parte A. Particella quantistica in una scatola (1.4 punti)

Consideriamo una particella di massa m che si muove in una buca di potenziale unidimensionale, dove la sua energia potenziale $V(x)$ è data da

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L; \\ \infty, & x < 0 \text{ o } x > L. \end{cases} \quad (1)$$

Mentre la particella classica può muoversi in un tale potenziale con una qualsiasi energia cinetica, per la particella quantistica sono consentiti solo alcuni specifici livelli discreti di energia positiva. In uno qualsiasi di tali stati consentiti, la particella può essere descritta come un'onda stazionaria di de Broglie con nodi alle pareti.

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.1 | Determinare la minima energia possibile E_{\min} della particella quantistica nella buca. Esprimere la risposta in funzione di m , L , e la costante di Planck h . | 0.4pt |
|------------|--|-------|

Lo stato della particella con la minima energia possibile è chiamato stato fondamentale e tutti gli altri stati consentiti sono chiamati stati eccitati. Ordiniamo tutti i possibili valori energetici in ordine crescente e denotiamoli come E_n , a partire da E_1 per lo stato fondamentale.

- | | | |
|------------|---|-------|
| A.2 | Trovare l'espressione generale per l'energia E_n (con $n = 1, 2, 3, \dots$). | 0.6pt |
|------------|---|-------|

- | | | |
|------------|---|-------|
| A.3 | La particella può subire una transizione istantanea da uno stato all'altro solo emettendo o assorbendo un fotone della corrispondente differenza di energia. Trovare la lunghezza d'onda λ_{21} del fotone emesso durante la transizione della particella dal primo stato eccitato (E_2) allo stato fondamentale (E_1). | 0.4pt |
|------------|---|-------|

Parte B. Proprietà ottiche delle molecole (2.1 punti)

In questa parte, studieremo diverse proprietà ottiche della molecola di cianina Cy5, una molecola colorante ampiamente utilizzata, mostrata schematicamente in Fig. 1a. Le sue proprietà ottiche sono determinate principalmente dalla struttura principale formata da carbonio, composta dall'alternanza di legami singoli e doppi tra atomi di carbonio, mostrati in Fig. 1b, mentre l'influenza degli anelli alle estremità della molecola e dei radicali R è molto più piccola. Tre dei quattro elettroni di valenza di ogni atomo C (e degli atomi N) nella struttura principale formano i legami chimici, mentre i restanti elettroni di valenza sono "condivisi" e possono muoversi lungo tutta la struttura principale. L'energia potenziale netta di ciascuno di questi elettroni è mostrata con una linea sottile oscillante in Fig. 1c, con minimi corrispondenti alle posizioni degli atomi C e N.

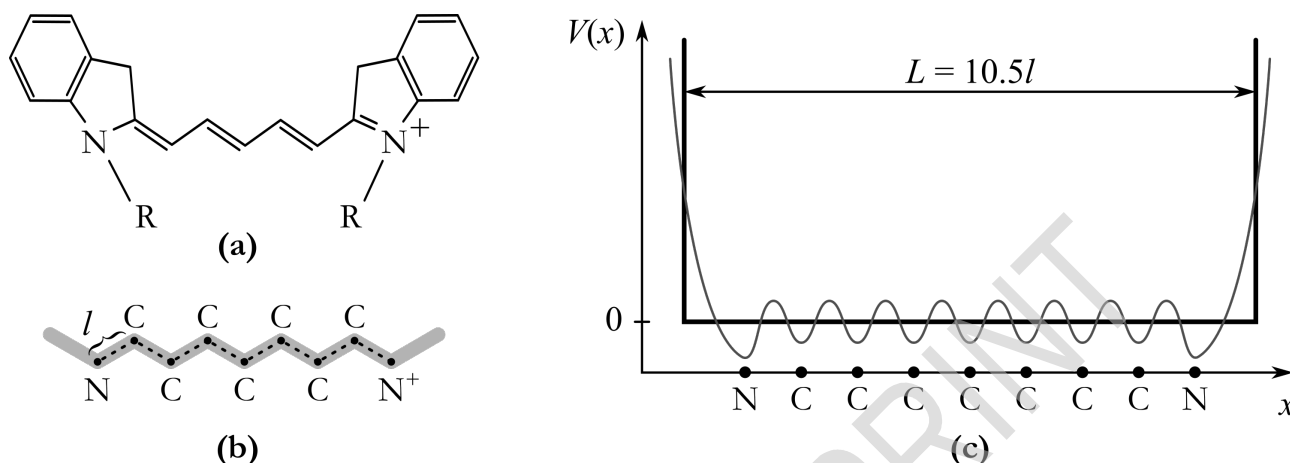


Figura 1. (a) Struttura chimica della molecola di cianina Cy5 (per semplicità, gli atomi di idrogeno non sono mostrati e R denota alcuni radicali). (b) La struttura principale della molecola Cy5, con distanza interatomica media l . (c) Energia potenziale dell'elettrone lungo la struttura principale (linea sottile) e sua approssimazione mediante la funzione a gradino data dall'Eq. 1 (linea spessa).

Per semplicità, si approssima questo profilo di energia potenziale con una semplice funzione data nella eq. 1 con la larghezza $L = 10.5l$ (vedi linea spessa in Fig. 1c), dove $l = 140$ pm è la distanza interatomica media (vedi anche Fig. 1b). Si ottiene così il "gas elettronico" composto da 10 elettroni (7 dagli atomi C, 2 dall'atomo N e 1 dallo ione N^+) che si muove in una buca di potenziale unidimensionale discussa nella Parte A. Nella nostra valutazione, possiamo trascurare l'interazione reciproca di questi elettroni; tuttavia, dovremmo rendere conto del fatto che gli elettroni sono fermioni e quindi obbediscono al principio di esclusione di Pauli. Trascuriamo anche l'influenza di altri elettroni così come il movimento dei nuclei.

B.1 Valutare la massima lunghezza d'onda λ del fotone che può essere assorbito dalla molecola Cy5 assumendo che il sistema di elettroni sia inizialmente allo stato fondamentale. Esprimere la risposta in funzione di l , costanti fisiche e qualche fattore numerico, e quindi calcolare il valore numerico. 0.8pt

B.2 Un'altra molecola colorante Cy3 ha una struttura simile, ma la sua struttura principale è più corta di 2 atomi di carbonio. Il suo spettro di assorbimento è spostato verso la regione spettrale più blu o più rossa rispetto alla molecola Cy5? Valuta numericamente l'ampiezza $\Delta\lambda$ di questo spostamento spettrale. Puoi presumere che la rimozione di due atomi di carbonio non cambi la forma della molecola e accorcia solo la lunghezza della struttura principale di due distanze interatomiche. 0.4pt

Essendo in uno stato eccitato la molecola può subire un decadimento spontaneo allo stato fondamentale mediante l'emissione di un fotone. Il tasso medio K di questi eventi (cioè la variazione relativa del numero di molecole presenti nello stato eccitato, dN/N , nell'intervallo tempo dt , $K = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$) dipende dalla lunghezza d'onda λ del fotone emesso, dal momento di dipolo elettrico della transizione d (che è dell'ordine di $d \simeq el$, dove e è la carica elementare) come pure dalla costante dielettrica ϵ_0 e dalla costante di Planck h .

B.3 Utilizzando l'analisi dimensionale, determinare l'espressione per il tasso di emissione spontanea in termini di ε_0 , h , λ e d . Il fattore numerico dell'espressione vale $k = \frac{16}{3}\pi^3$. 0.7pt

B.4 Per la molecola Cy5, $d \approx 2.4 \text{ el}$. Valutare la durata media della fluorescenza dello stato eccitato più basso della molecola Cy5, τ_{Cy5} che è reciproco del tasso della sua transizione emissiva allo stato fondamentale. 0.2pt

Parte C. Condensazione di Bose-Einstein (1.5 punti)

Questa parte non è direttamente correlata alle Parti A e B. Qui studieremo il comportamento collettivo delle particelle bosoniche. I bosoni non rispettano il principio di esclusione di Pauli e, a basse temperature o ad alta densità, sperimentano un fenomeno drammatico noto come condensazione di Bose-Einstein (BEC). Questa è una transizione di fase verso un intrigante stato quantistico collettivo: un gran numero di particelle identiche si "condensano" in un singolo stato quantico e iniziano a comportarsi come una singola onda. La transizione viene tipicamente raggiunta raffreddando un numero fisso di particelle al di sotto della temperatura critica. In linea di principio, può anche essere indotto mantenendo fissata la temperatura e portando la densità delle particelle oltre il suo valore critico.

Iniziamo esplorando la relazione tra la temperatura e la densità delle particelle alla transizione. Come risulta, le stime dei loro valori critici possono essere dedotte da una semplice osservazione: *la condensazione di Bose-Einstein avviene quando la lunghezza d'onda di de Broglie corrispondente alla velocità quadratica media delle particelle è uguale alla distanza caratteristica tra le particelle in un gas*.

C.1 Dato un gas non interagente di atomi di ^{87}Rb in equilibrio termico, scrivere le espressioni per la loro quantità di moto tipica p e la tipica lunghezza d'onda di de Broglie λ_{dB} in funzione della massa dell'atomo m , la temperatura T e costanti fisiche. 0.4pt

C.2 Calcolare la distanza tipica tra le particelle in un gas, ℓ , in funzione della densità delle particelle n . Poi dedurre la temperatura critica T_c in funzione della massa degli atomi, della loro densità e delle costanti fisiche. 0.5pt

Per realizzare la BEC in laboratorio, gli sperimentatori devono raffreddare i gas a temperature fino a $T_c = 100 \text{ nK}$.

C.3 Qual è la densità di particelle del gas Rb n_c se la transizione avviene a tale temperatura? Per fare un confronto, calcola anche la densità di particelle "ordinaria" n_0 di un gas perfetto alla temperatura e pressione standard (STP), cioè $T_0 = 300 \text{ K}$ e $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Quante volte il gas "normale" è più denso? Puoi assumere che la massa degli atomi sia uguale a 87 unità di massa atomica (m_{amu}). 0.6pt

Parte D. Reticolo ottico con tre fasci (5 punti)

I primo condensati di Bose-Einstein furono realizzate nel 1995 e da allora il lavoro sperimentale si è ramificato in direzioni diverse. In questa parte, approfondirai una idea particolarmente fruttuosa, quella di disporre il condensato in potenziali spazialmente periodici creati mediante l'interferenza di un certo numero di fasci laser coerenti. A causa della natura periodica della struttura di interferenza che ne risulta,

essi sono chiamati *reticoli ottici*. L'energia potenziale $V(\vec{r})$ di un atomo che si muove in un reticolo ottico è proporzionale all'intensità locale della luce e nel nostro calcolo possiamo assumere che

$$V(\vec{r}) = -\alpha \langle |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \rangle. \quad (2)$$

Qui, α è una costante *positiva*, e le parentesi angolari indicano l'operazione di media temporale che elimina i termini rapidamente oscillanti. Il campo elettrico prodotto dall'*i*-esimo laser è descritto da

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \vec{e}_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (3)$$

con la ampiezza $E_{0,i}$, il vettore d'onda \vec{k}_i , e il vettore di polarizzazione di modulo unitario \vec{e}_i .

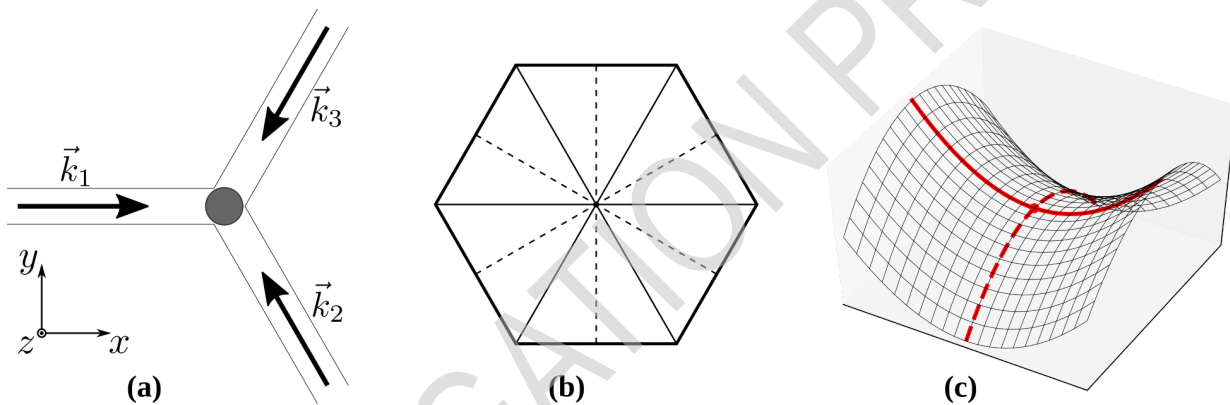


Figura 2. (a) Reticolo ottico a tre fasci: tre onde piane con vettori d'onda $\vec{k}_{1,2,3}$ si intersecano e interferiscono nell'area indicata dal cerchio grigio. (b) Simmetrie di un esagono regolare: le linee piene e tratteggiate mostrano due insiemi di assi di simmetria. (c) Punto sella: un punto su una superficie in cui le pendenze in direzioni ortogonali sono tutte nulle ma che non è un estremo locale della funzione disegnata. Muovendosi nella direzione indicata dalla linea piena si attraversa quello che sembra un minimo. Una analisi addizionale nella direzione perpendicolare (linea tratteggiata) è necessaria per distinguere un vero minimo da un punto di sella (quello indicato).

Il tuo compito è quello di studiare i *reticoli triangolari ottici* che vengono prodotti dall'interferenza di tre fasci laser coerenti di identica intensità. Una tipica disposizione è mostrata in Fig. 2a. Qui, tutti e tre i fasci sono polarizzati nella direzione z , si propagano nel piano xy e si intersecano formando angoli uguali di 120° . Scegli la direzione dell'asse x parallela al vettore d'onda \vec{k}_1 .

- D.1** Utilizzando le equazioni 2 e 3 ottieni l'espressione per l'energia potenziale $V(\vec{r})$ come funzione di $\vec{r} = (x, y)$ nel piano dei fasci. 1.4pt
Suggerimento: il risultato può essere espresso in maniera elegante con una costante sommata a tre funzioni coseno di argomenti $\vec{b}_i \cdot \vec{r}$. Scrivi il tuo risultato in questa forma e identifica i vettori \vec{b}_i .

- D.2** L'energia potenziale risultante ha un asse di simmetria rotazionale di ordine 6, cioè il potenziale è invariante rispetto ad una rotazione di un multiplo di 60° rispetto all'origine. Fornisci un semplice argomento per dimostrare che questo è in effetti il caso. 0.5pt

La precedente osservazione di simmetria semplifica l'analisi della distribuzione di potenziale bidimensionale $V(\vec{r})$. Come mostrato in Fig. 2b, un esagono regolare ha assi di simmetria che, rispettivamente, uniscono vertici opposti (linee piene) e i punti medi dei lati opposti (linee tratteggiate). Perciò, nella nostra situazione non è necessario realizzare e studiare grafici bidimensionali del potenziale poichè molti risultati possono essere ottenuti focalizzandosi sugli assi coordinati x e y coincidenti con le linee di simmetria.

- D.3** Deriva il comportamento del potenziale $V(\vec{r})$ lungo gli assi coordinati cioè determina le funzioni $V_X(x) \equiv V(x, 0)$ e $V_Y(y) \equiv V(0, y)$. Trova la posizione degli estremi di $V_X(x)$ e $V_Y(y)$ come funzioni di un singolo argomento. Poichè queste funzioni sono periodiche, includi nei tuoi elenchi solo un rappresentante di ogni famiglia di massimi e minimi periodicamente ripetuti. 1.2pt

Noi siamo interessati alla determinazione della posizione dei cosiddetti *siti reticolari*, cioè dei minimi del potenziale bidimensionale completo $V(\vec{r})$. I minimi calcolati delle funzioni di un singolo argomento V_X e V_Y identificano le loro possibili posizioni ma devono essere verificate per eliminare i punti sella. Come mostrato nella Fig. 2c, quando sono analizzati lungo una singola direzione i punti sella possono mimetizzarsi come minimi pur non essendo questo il caso.

- D.4** Passa in rassegna i tuoi risultati della domanda precedente per determinare i veri minimi del reticolo ottico: identifica tutti i minimi equivalenti più vicini (ma non coincidenti) con l'origine. Qual è la distanza a tra i minimi più vicini, in altri termini la *costante reticolare* del nostro reticolo ottico? Esprimi la risposta in termini della lunghezza d'onda del laser λ_{las} . 0.8pt

Il fatto che gli atomi ultrafreddi sono neutri suggerisce che le loro interazioni diventano importanti solo quando due o più atomi occupano lo stesso sito di un reticolo ottico. D'altra parte gli sperimentali sono in grado di studiare situazioni che presuppongono interazioni atomiche a lungo raggio. Un possibile approccio presuppone la realizzazione dei cosiddetti *atomi di Rydberg* che sono fisicamente grandi e presentano altre proprietà anormalmente grandi. Gli atomi di Rydberg sono atomi eccitati con un elettrone eccitato in uno stato con un numero quantico principale n molto grande. La dimensione di un atomo di Rydberg può essere determinata calcolando il raggio dell'orbita circolare classica di un elettrone con momento angolare orbitale $n\hbar$, dove \hbar è la costante di Plank ridotta.

- D.5** Calcola il valore di n che corrisponde al raggio dell'atomo di Rydberg Rb confrontabile con la lunghezza d'onda del laser $\lambda_{\text{las}} = 380 \text{ nm}$. Esprimi la tua risposta in termini di λ_{las} e costanti fisiche e determina il suo valore numerico. 1.1pt