

OLIMPIADI DI FISICA 2003

11 Aprile 2003

SOLUZIONI della Gara Nazionale (Prova Teorica)

PROBLEMA n. 1 — Chi sale, chi scende...

100 Punti

Quesito n. 1 – Condizione di equilibrio.

Dall'analisi dei momenti delle forze agenti, all'equilibrio deve essere

$$m_1 R_1 = m_2 R_2.$$

La condizione di equilibrio è invece indipendente dai valori di M_1 e M_2 .

Quesito n. 2 – Verso di rotazione.

Con i dati forniti nel testo il modulo del momento delle forze è maggiore per la massa m_1 , quindi le pulegge ruotano in senso antiorario. Infatti i momenti meccanici valgono

$$\mathcal{M}_1 = m_1 g R_1$$

$$\mathcal{M}_2 = m_2 g R_2 = \frac{1}{2} m_1 g R_1$$

da cui $\mathcal{M}_1 = 2\mathcal{M}_2$.

Quesito n. 3 – Velocità v_1 .

Poiché le corde non scivolano nel loro moto intorno ai dischi, quando la massa m_1 è scesa di un tratto h , la massa m_2 è salita di un tratto

$$h' = h \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2} h$$

e la diminuzione totale dell'energia potenziale ΔU vale

$$\Delta U = m_1 g h - m_2 g h' = \frac{1}{2} m_1 g h.$$

Contemporaneamente entrambe le pulegge avranno acquisito una velocità angolare

$$\omega = \frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2} \Rightarrow v_1 = v_2 \frac{R_1}{R_2} = 2v_2$$

e un'energia cinetica di rotazione pari a $\frac{1}{2} I \omega^2$. L'energia cinetica totale E varrà dunque

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left(1 + \frac{9}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \right) = \frac{49}{16} m_1 v_1^2.$$

Dalla conservazione dell'energia $E = \Delta U$ si può ricavare la velocità v_1 in funzione di h

$$\frac{49}{16} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 g h \Rightarrow v_1 = \frac{2}{7} \sqrt{2gh}.$$

Quesito n. 4 – Tensioni delle corde.

Sul sistema delle pulegge e delle masse agiscono solamente forze e momenti costanti, dunque la massa m_1 scende di moto uniformemente accelerato e dalla relazione $v^2 - v_0^2 = 2ah$ si ricava l'accelerazione a_1 (poiché la massa m_1 parte da ferma, $v_0 = 0$)

$$a_1 = \frac{v_1^2}{2h} = \frac{4}{49} g.$$

L'accelerazione a_2 invece vale

$$a_2 = a_1 \frac{R_2}{R_1} = \frac{2}{49} g.$$

Dalla seconda legge di Newton applicata alla massa m_1 si ricava infine

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{45}{49} m_1 g$$

e in modo analogo

$$m_2 g - T_2 = -m_2 a_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{51}{49} m_1 g.$$

Una soluzione alternativa per determinare a_1 consiste nell'utilizzare la seconda equazione cardinale $\mathcal{M} = dL/dt$ dove \mathcal{M} è il momento risultante applicato al sistema e L il momento angolare totale (dato dalla somma del momento angolare dei dischi e quello delle masse):

$$\mathcal{M} = m_1 g R_1 - m_1 g \frac{R_1}{2} = \frac{1}{2} m_1 g R_1 \quad \text{e} \quad L = (I_1 + I_2)\omega + m_1 R_1 v_1 + m_1 \frac{R_1}{2} \frac{v_1}{2} = (I_1 + I_2)\omega + \frac{5}{4} m_1 R_1 v_1$$

essendo $v_1 = \omega R_1$. Si ricava quindi l'equazione

$$\frac{1}{2} m_1 g R_1 = (I_1 + I_2) \frac{a_1}{R_1} + \frac{5}{4} m_1 R_1 a_1,$$

da cui si ottiene lo stesso valore per a_1 che con il metodo precedente; la soluzione procede poi come prima.

Quesito n. 5 – Forza esercitata dal soffitto.

Quando le masse sono ferme anche il baricentro del sistema è fermo, il soffitto esercita la forza necessaria a sostenere il sistema, che è pari alla somma dei pesi delle masse.

Durante il moto, la massa m_1 si muove di moto accelerato con velocità doppia dell'altra, dunque il baricentro del sistema scende di moto accelerato a causa della forza risultante tra la reazione vincolare esercitata dal soffitto in P e la somma dei pesi delle masse.

La forza esercitata dal soffitto è dunque maggiore quando le masse sono ferme. In formule, con le masse ferme, la forza F esercitata dal soffitto nel punto P vale

$$F = m_1 g + m_2 g + M_1 g + M_2 g = 14 m_1 g,$$

mentre con le masse in moto vale

$$F' = T_1 + T_2 + M_1 g + M_2 g = \frac{684}{49} m_1 g < 14 m_1 g.$$

————— • —————

PROBLEMA n. 2 — Anelli in campo

100 Punti

Quesito n. 1 – Energia assorbita dalla carica in un giro.

Il modulo di \vec{B} varia secondo la legge $B = B_0(1 - t/\tau)$.

Il flusso del campo magnetico attraverso l'anello ha, a ogni istante, intensità $\Phi = \pi r^2 B_0(1 - t/\tau)$. Poiché il flusso è variabile nel tempo si genera nell'anello una forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \frac{B_0}{\tau}$$

il cui valore è costante durante tutto il periodo di variabilità del campo magnetico.

L'energia trasferita alla carica è

$$W = \mathcal{E}q = \frac{\pi r^2 q B_0}{\tau}.$$

Lungo l'anello viene generato un campo elettrico indotto \vec{E} che, per simmetria, ha direzione tangente all'anello e intensità costante in ogni suo punto data dalla relazione $2\pi r E = \mathcal{E}$. Si ha dunque

$$E = \frac{r B_0}{2\tau}$$

Quesito n. 2 – Velocità degli anelli dopo un giro.

L'energia cinetica W trasferita ad un anello di raggio r dopo che, partendo da fermo, ha compiuto un intero giro è data dalla relazione

$$\frac{1}{2} I \omega_1^2 = W \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m r^2 \omega_1^2 = \frac{\pi r^2 q B_0}{\tau}$$

dove ω_1 è la velocità angolare acquistata dall'anello dopo un giro.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2W}{I}} = \sqrt{\frac{2\pi B_0 q}{m\tau}}$$

Si osserva che la velocità angolare acquistata dopo un giro completo non dipende dal raggio dell'anello ed è quindi, in modulo, uguale per i due anelli.

Quesito n. 3 – Velocità finale degli anelli.

La carica distribuita su un anello è soggetta alla forza $\vec{F} = q\vec{E}$ diretta tangenzialmente all'anello e concorde o discorde con il verso del campo elettrico indotto a seconda che la carica sia positiva o negativa.

Tale forza dà luogo ad un momento \vec{M} rispetto ad un asse verticale che passa per il centro dell'anello, di intensità $M = qrE$ e diretto verso l'alto o verso il basso a seconda che la carica sia positiva o negativa:

$$M = \frac{B_0 q r^2}{2\tau}$$

L'anello carico positivamente, visto dall'alto, gira dunque in verso antiorario e quello carico negativamente gira in verso opposto.

Essendo la forza elettromotrice indotta costante durante tutto il periodo di variabilità del campo magnetico anche l'intensità del campo elettrico lungo gli anelli rimane costante e costante è il momento di rotazione della forza. Gli anelli girano dunque con accelerazione angolare costante di modulo uguale e segno opposto, determinato dal segno della carica su ciascuno di essi

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{B_0 q}{2m\tau}$$

Ne segue che a ogni istante t le velocità angolari dei due anelli hanno valore opposto

$$\omega = \frac{B_0 q}{2m\tau} t$$

e all'istante τ , quando il campo magnetico si estingue, esse sono

$$\omega = \frac{B_0 q}{2m}$$

Quesito n. 4 – Velocità degli anelli connessi.

Il sistema dei due anelli collegati fra loro è soggetto ad un momento di rotazione M_s dato dalla somma algebrica dei momenti che agiscono sui singoli anelli e precedentemente determinati:

$$M_s = M_2 + M_1 = \frac{B_0 q}{2\tau} (r_2^2 - r_1^2)$$

Anche in questo caso il sistema ruota con un'accelerazione angolare costante: $\alpha_s = M_s/I_s$.

Il momento di inerzia del sistema, I_s , essendo le astine di collegamento di massa trascurabile, è

$$I_s = I_1 + I_2 = m(r_1^2 + r_2^2).$$

Inserendo l'espressione del momento di inerzia nella precedente l'accelerazione angolare si può scrivere

$$\alpha_s = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2 + r_1^2} \frac{B_0 q}{2\tau m}$$

La velocità angolare raggiunta dal sistema all'istante τ è

$$\omega_\tau = \alpha_s \tau = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2 + r_1^2} \frac{B_0 q}{2m}$$

————— • —————

PROBLEMA n. 3 — Pianeti extra-solari

100 Punti

Nella soluzione che segue, con i pedici p, \star , S, G e T vengono indicate rispettivamente grandezze relative al pianeta, alla stella, al Sole, a Giove e alla Terra.

Quesito n. 1 – Massa del pianeta.

Il flusso luminoso è proporzionale alla superficie emittente: considerando i casi di flusso luminoso massimo e minimo, si ha

$$\frac{F_{\min}}{F_{\max}} = \frac{\pi(R_\star^2 - R_p^2)}{\pi R_\star^2} = 1 - \left(\frac{R_p}{R_\star}\right)^2$$

da cui si ricava

$$\left(\frac{R_p}{R_\star}\right) = \sqrt{1 - \frac{F_{\min}}{F_{\max}}}$$

L'ipotesi di uguale densità (a questo proposito vedere la Nota finale) consente di determinare il rapporto delle masse

$$\left(\frac{M_p}{M_\star}\right) = \left(\frac{R_p}{R_\star}\right)^3 = \left(1 - \frac{F_{\min}}{F_{\max}}\right)^{3/2}$$

Essendo poi

$$\left(\frac{M_G}{M_S}\right) = \frac{1}{1047}$$

avendo assunto $M_* \approx M_S$ e dividendo membro a membro

$$\frac{M_p}{M_G} = 1047 \left(1 - \frac{F_{\min}}{F_{\max}} \right)^{3/2}$$

Valori numerici: $F_{\min} = 0.986$; $F_{\max} = 1 \Rightarrow M_p = 1.7 M_G$.

Quesito n. 2 – Raggio dell'orbita.

Per la terza legge di Keplero (trascurando la massa del pianeta)

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_*}{4\pi^2}$$

La relazione analoga per la Terra è

$$\frac{a_T^3}{T_T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}$$

da cui, dividendo membro a membro:

$$\frac{a}{a_T} = \left(\frac{T}{T_T} \right)^{2/3}$$

Valori numerici: $T = 3.52 \text{ d} = 9.64 \times 10^{-3} \text{ y}$, $T_T = 1 \text{ y}$, $a_T = 1 \text{ A} \Rightarrow a = 0.045 \text{ A}$

Quesito n. 3 – Interpretazione del grafico.

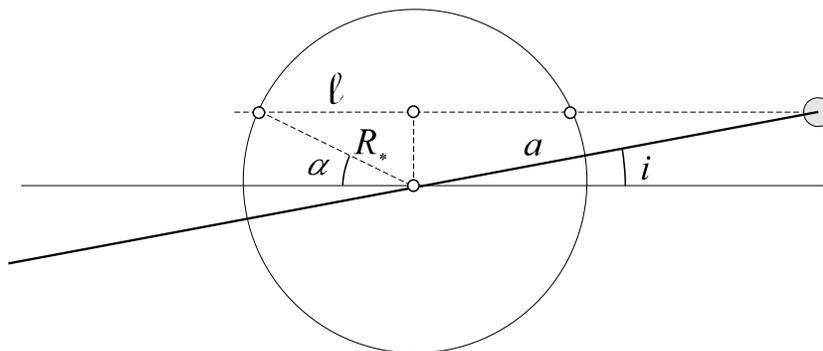
Il punto A individua il cosiddetto *primo contatto* quando il disco del pianeta inizia a sovrapporsi a quello della stella. Il punto B corrisponde all'ingresso completo del pianeta sul disco stellare. In modo corrispondente i punti C e D corrispondono all'inizio e alla fine della fase di uscita del pianeta.

Il tempo tra gli istanti A e B è dunque il tempo di *entrata* proporzionale al diametro del pianeta, mentre il tempo di transito – con riferimento al centro del pianeta – si ottiene prendendo i punti medi dei segmenti AB e CD.

Quesito n. 4 – Inclinazione dell'orbita.

Indichiamo con T_e il “tempo di entrata” (o di uscita) e con T_t il “tempo di transito”. Sia poi ℓ la lunghezza della semicorda percorsa dal pianeta nel transito. Sarà

$$\frac{T_e}{T_t} = \frac{R_p}{\ell}$$



Definiti gli angoli α e i come in figura, poiché la distanza della Terra è molto maggiore del raggio dell'orbita risulta

$$R_* \sin \alpha = a \sin i \Rightarrow \sin i = \frac{R_*}{a} \sin \alpha$$

L'angolo α si ricava da

$$\cos \alpha = \frac{\ell}{R_*} = \frac{R_p T_t}{R_* T_e}$$

Essendo $\delta = 2R_S/a_T$ il diametro angolare del Sole (espresso in radianti), risulta

$$\frac{R_\star}{a} = \frac{R_S}{a_T} \frac{a_T}{a} = \frac{\delta a_T}{2a} \quad \text{e quindi} \quad \sin i = \frac{\delta a_T}{2a} \sin \alpha$$

Valori numerici: con $T_t \approx 0.12$ d, $T_e \approx 0.02$ d $\alpha \approx 45^\circ$ e $\delta = 32' = 9.31 \times 10^{-3}$ rad $\Rightarrow i \approx 4^\circ$.

Nota: Alla luce delle osservazioni successive, l'ipotesi assunta per la densità non appare corretta e di conseguenza la massa ottenuta è abbastanza diversa da quella attualmente accettata pari a circa 0.7 masse di Giove. Questo risultato si ottiene anche attraverso precise misure di velocità radiale e conseguente ricostruzione dell'orbita.

Materiali prodotti dal gruppo

	<p>PROGETTO OLIMPIADI Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica presso Liceo Scientifico "U. Morin" VENEZIA MESTRE fax: 041.584.1272 e-mail: olifis@libero.it</p>
---	--

La Gara Nazionale è realizzata con il sostegno di

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Comune di Senigallia

Liceo Scientifico "E. Medi" di Senigallia

 **Zanichelli editore**