Associazione per l'Insegnamento della Fisica

Progetto Olimpiadi

OLIMPIADI DI FISICA 2004

23 Aprile 2004

SOLUZIONI della Gara Nazionale (Prova Teorica)

PROBLEMA n. 1 — Asta

100 Punti

Quesito n. 1 – Asta senza appoggio verticale e senza attrito.

Non essendoci forze laterali, il centro di massa cade lungo la verticale e quindi atterra in O.

Quesito n. 2 – Asta con appoggio verticale e senza attrito.

Siano ω e α la velocità e l'accelerazione angolare dell'asta durante la caduta. Fino al punto di scivolamento, il centro di massa segue un arco di cerchio ed ha un'accelerazione tangenziale $a_\mathrm{T} = \alpha L/2$ e un'accelerazione radiale centripeta, rivolta verso O, $a_\mathrm{R} = \omega^2 L/2$. La coppia agente è

$$\tau = Mg\frac{L}{2}\cos\vartheta = I\alpha\,,$$

dove $I = ML^2/3$ è il momento d'inerzia rispetto a O. Ne segue

$$a_\mathrm{T} = \frac{MgL\cos\vartheta/2}{ML^2/3}\,\frac{L}{2} = \frac{3}{4}g\cos\vartheta\,.$$

Confrontando poi la perdita di energia potenziale col guadagno di energia cinetica rotazionale si ha

$$Mg\frac{L}{2}\left(1-\operatorname{sen}\vartheta\right) = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{1}$$

da cui

$$a_\mathrm{R} = 2\frac{MgL\left(1-\operatorname{sen}\vartheta\right)/2}{ML^2/3}\,\frac{L}{2} = \frac{3}{2}g\left(1-\operatorname{sen}\vartheta\right)\,.$$

Perché il centro di massa si sposti lateralmente occorre una forza orizzontale F che, in assenza di attrito, deve venire dal contatto con la parete verticale:

$$F = Ma_\mathrm{T}\operatorname{sen}\vartheta - Ma_\mathrm{R}\cos\vartheta = M\left[\frac{3}{4}g\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta - \frac{3}{2}g\left(1-\operatorname{sen}\vartheta\right)\cos\vartheta\right] = \frac{3}{4}Mg\cos\vartheta\left(3\operatorname{sen}\vartheta-2\right) \tag{2}$$

L'asta perde contatto con la parete quando $F=0$, cioè quando $\operatorname{sen}\vartheta = 2/3$ e $\vartheta = 41.8°$. La velocità v del centro di massa è semplicemente $\omega L/2$, e ω si ricava dall'equazione (1):

$$\omega^2 = \frac{2MgL\left(1-\operatorname{sen}\vartheta\right)/2}{ML^2/3} = \frac{3g\left(1-\operatorname{sen}\vartheta\right)}{L}$$

da cui, nella condizione limite trovata,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{e} \quad v = \frac{1}{2}\sqrt{gL}\,.$$

Quesito n. 3 – Asta senza appoggio verticale ed attrito.

Inizialmente l'asta ruota intorno ad O e quindi - fin che non c'è slittamento - il moto può essere descritto come nel caso 2, la componente orizzontale della forza essendo in questo caso fornita dall'attrito. Indicando con N la reazione vincolare normale al pavimento e con F la componente orizzontale della forza occorrente, e riutilizzando l'equazione (2) precedente, si ottiene

$$F = \frac{3}{4} Mg \cos\vartheta \, (3 \operatorname{sen}\vartheta - 2) \tag{3}$$

che si annulla quando $\operatorname{sen}\vartheta = 2/3$, come nel caso precedente; successivamente F è negativa, e ciò significa che l'attrito deve trattenere il punto d'appoggio dell'asta che tenderebbe a muoversi nello stesso verso del moto del centro di massa. Per ricavare N si applica il secondo principio lungo la direzione verticale, riutilizzando anche qui le accelerazioni calcolate nel caso precedente:

$$Mg - N = Ma_{\mathrm{T}} \cos\vartheta + Ma_{\mathrm{R}} \operatorname{sen}\vartheta = \frac{3}{4} Mg \cos^2\vartheta + \frac{3}{2} Mg \,(1 - \operatorname{sen}\vartheta) \operatorname{sen}\vartheta$$

ovvero

$$N = \frac{Mg}{4} \left(9 \operatorname{sen}^2\vartheta - 6 \operatorname{sen}\vartheta + 1\right) = \frac{Mg}{4} \left(3 \operatorname{sen}\vartheta - 1\right)^2$$

dal che si evince che N si annulla quando $\operatorname{sen}\vartheta = 1/3$, ovvero $\vartheta = 19.5°$. Poiché per questo valore di ϑ F non è nulla, in queste condizioni nessun valore di μ può evitare lo slittamento.

In generale si avrà slittamento a partire dal primo valore di ϑ per cui il valore di F calcolato con l'equazione (3) supera il valore massimo possibile per l'attrito, cioè μN. La disequazione risultante, tuttavia, è trascendente e può essere risolta solo per via numerica. Ad esempio, per $\mu = 1$ lo slittamento inizia per $\vartheta = 35.95°$. Ma questo non era richiesto dal problema.

PROBLEMA n. 2 — Un oggetto in moto rettilineo

60 Punti

A pagina seguente è rappresentato un possibile foglio risposta.

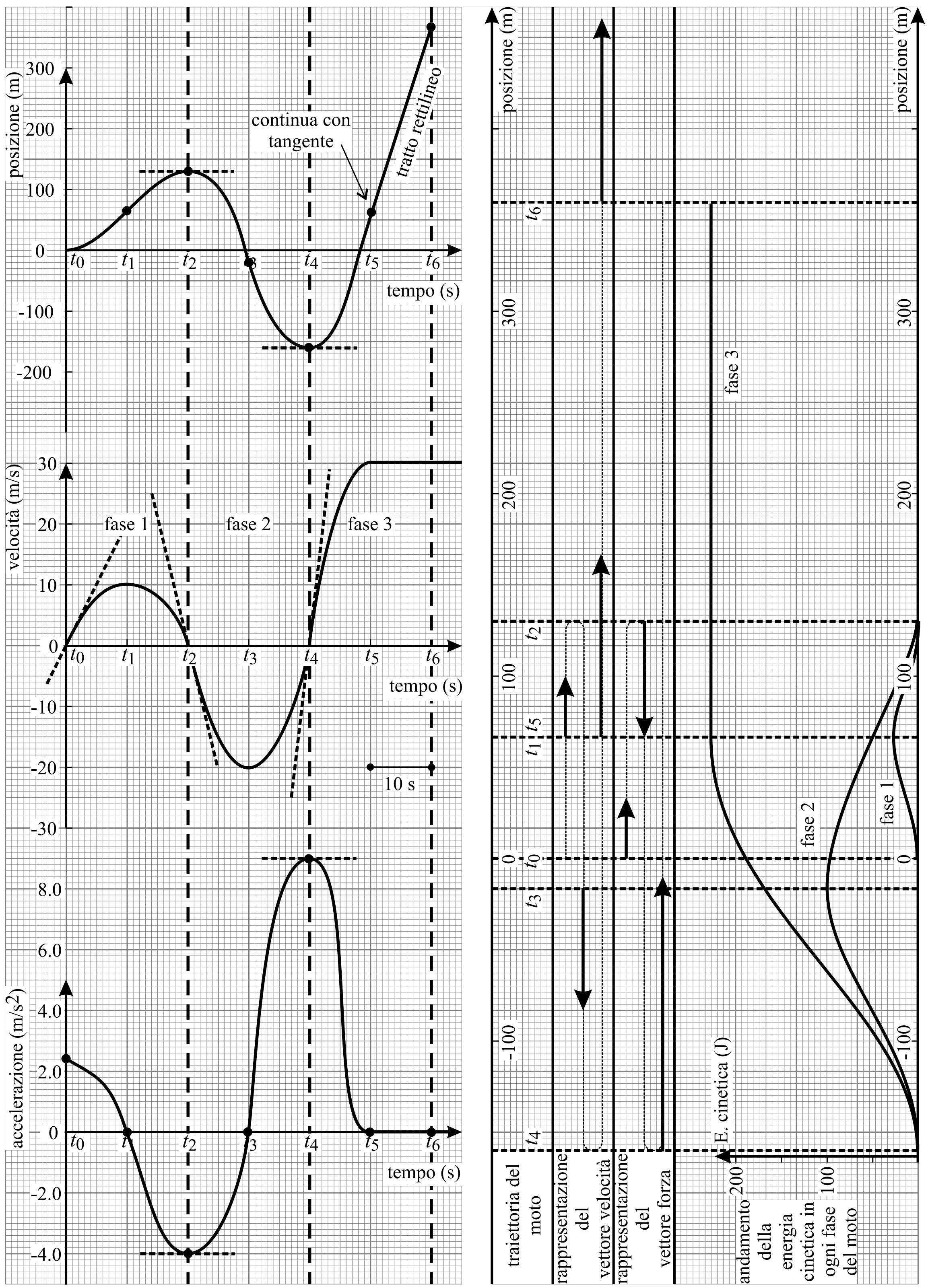
Qui sotto è riportata una tabella con i valori delle grandezze utilizzati per tracciare gli andamenti grafici. Tali valori hanno un margine di discrezionalità che dipende dalla lettura in parte soggettiva del grafico a causa dell'approssimazione dei tratti grafici.

Tempo, (s)	Posizione, (m)	Accelerazione, ($\mathrm{m\,s^{-2}}$)	Forza, (N)	E. Cinetica, (J)
0	0	2.2	1.1	0
10	65	0.0	0.0	25
20	129	-4.0	-2.0	0
30	-15	0.0	0.0	100
40	-160	9.0	4.5	0
50	62	0.0	0.0	225
60	362	0.0	0.0	225

Per determinare l'andamento della legge oraria del moto, si ricorda che la legge oraria, ovvero la posizione dell'oggetto lungo la traiettoria in funzione del tempo, può essere ricavata direttamente per via grafica dalla funzione $v(t)$ misurando l'area sottesa al grafico tra l'istante iniziale e l'istante considerato, con la condizione iniziale $s(0) = 0\,\mathrm{m}$. Si tiene conto anche del fatto che gli zeri di $v(t)$ corrispondono a punti stazionari della legge oraria del moto, ovvero a punti della traiettoria in cui l'oggetto inverte il senso di moto.

Anche l'accelerazione può essere ricavata direttamente dal grafico della funzione $v(t)$, valutandone la pendenza negli istanti considerati. Si tiene conto anche del fatto che i punti stazionari di $v(t)$ corrispondono punti in cui l'accelerazione è nulla e che i flessi di $v(t)$ (in questo moto coincidono con gli zeri della velocità negli istanti t_2 e t_4) corrispondono a punti stazionari dell'accelerazione. I primi corrispondono, nella traiettoria, a massimi dell'energia cinetica, i secondi a punti in cui è massima l'intensità della forza.

Per la definizione delle scale per le rappresentazioni grafiche si è tenuto conto che, nel grafico della velocità, un millimetro in ascissa corrisponde a 1 s, mentre un millimetro in ordinata a $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.



PROBLEMA n. 3 — Canna barometrica

70 Punti

Quesito n. 1 – Volume della bolla d'aria in condizioni standard.

All'equilibrio la pressione p della bolla d'aria è legata alla pressione atmosferica p_0 e alla pressione della colonna di mercurio, $p_0 h/H$ (avendo definito $H = 76\,\mathrm{cm}$), dalla relazione

$$p_0 = p_0 \frac{h}{H} + p \quad \Rightarrow \quad p = p_0 \left(1 - \frac{h}{H}\right) .$$

Il volume della bolla d'aria vale $V = A(\ell - h)$ e, dall'equazione di stato dei gas perfetti, si ha:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{pV}{T_0} \quad \Rightarrow \quad V_0 = V \frac{p}{p_0} = A(\ell - h)\left(1 - \frac{h}{H}\right) = 5\,\mathrm{cm}^3 .$$

Quesito n. 2 – Temperatura del sistema.

Applicando nuovamente l'equazione di stato dei gas perfetti si ha

$$\frac{pV}{T} = \frac{p'V'}{T'}$$

da cui

$$T' = \frac{p'V'}{pV} T = \frac{p_0\,(1 - h'/H)\,A\,(\ell - h')}{p_0\,(1 - h/H)\,A\,(\ell - h)} T_0 = T_0 \, \frac{\ell - h'}{\ell - h} \, \frac{H - h'}{H - h} = 306\,\mathrm{K} = 33^\circ\mathrm{C} .$$

Quesito n. 3 – Lavoro di espansione della bolla d'aria.

Durante l'espansione il lavoro fatto sull'ambiente esterno, $\mathcal{L}_{\mathrm{est}}$, è in parte fornito dalla diminuzione dell'energia potenziale gravitazionale ΔU del mercurio contenuto nella canna barometrica e per la restante parte, $\mathcal{L}$, dall'aumento di volume della bolla d'aria.

$$\mathcal{L} + |\Delta U| = \mathcal{L}_{\mathrm{est}} .$$

Considerato che la sezione della canna è trascurabile rispetto quella della base, la variazione di altezza del livello del mercurio nella base del barometro può considerarsi trascurabile e si ricava

$$\mathcal{L}_{\mathrm{est}} = p_0 \Delta V = p_0 A\,(h - h') = 101.3\,\mathrm{mJ} .$$

La variazione dell'energia potenziale del mercurio è determinabile considerando che il baricentro della quantità di mercurio contenuta nel volume $\Delta V = A\,(h - h')$ inizialmente si trova ad una quota $(h' + h)/2$ mentre al termine dell'espansione viene a trovarsi al livello zero del mercurio nella base del barometro, da cui si ricava

$$\Delta U = -mg\frac{h + h'}{2} = -\rho V g \frac{h + h'}{2} = -\frac{p_0}{H}\,A(h - h')\frac{h + h'}{2} = -85.97\,\mathrm{mJ} ,$$

avendo indicato con ρ la densità del mercurio e ricordando che $p_0 = \rho g H$. Si ottiene infine

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{est}} - |\Delta U| = p_0 A\,(h - h') - p_0 A \frac{h^2 - h'^{\,2}}{2H} = p_0 A(h - h')\left(1 - \frac{h + h'}{2H}\right) = 15\,\mathrm{mJ} .$$

Soluzione alternativa

Poiché

$$V = Ax \quad \text{con} \quad x = \ell - h \quad \Rightarrow \quad dV = Adx$$

e

$$p(x) = p_0 - \frac{\ell - x}{H} p_0$$

dalla definizione di lavoro si ha

$$\mathcal{L} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{\ell - h}^{\ell - h'} p_0 \left(1 - \frac{\ell - x}{H}\right) Adx = p_0 A \left[\left(1 - \frac{\ell}{H}\right) x + \frac{1}{2H} x^2\right]_{\ell - h}^{\ell - h'} \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L} = p_0 A\,(h - h')\left(1 - \frac{h + h'}{2H}\right) = 15\,\mathrm{mJ} .$$

Quesito n. 4 – Calore assorbito dalla bolla d'aria.

Approssimando il comportamento termodinamico dell'aria con quello di un gas perfetto biatomico, il calore assorbito dall'aria vale

$$Q = \Delta U + \mathcal{L}$$

con

$$\Delta U = nC_V\Delta T = \frac{5}{2}nR\Delta T = \frac{5}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) = \frac{5}{2}p_0A(h-h')\left(1+\frac{\ell}{H}+\frac{h+h'}{H}\right) = 1\,\mathrm{mJ}\,,$$

da cui si ricava infine

$$Q = \Delta U + \mathcal{L} = 1 + 15 = 16\,\mathrm{mJ}\,.$$

———— . ————

PROBLEMA n. 4 — Cavo coassiale

70 Punti

Quesito n. 1 – Densità di carica.

Detta λ la densità lineare di carica cercata, data la simmetria cilindrica si può usare il teorema di Gauss per determinare il campo elettrostatico e da questa la d.d.p. tra i due conduttori.

Preso un cilindro in asse con il cavo coassiale, di altezza L e raggio r con $a < r < b$, per la simmetria del sistema il campo elettrico $\vec{E}$ è diretto radialmente ed il suo modulo è uniforme su tutta la superficie laterale Ω del cilindro. Il flusso del campo elettrico attraverso le superfici di base del cilindro è dunque nullo in quanto il campo elettrico è ortogonale al vettore superficie mentre il flusso del campo elettrico attraverso la superficie laterale vale

$$\Phi_\Omega(\vec{E}) = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \int_0^L E(r)2\pi r dx = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

da cui si ricava

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

e, noto $\vec{E}$, si ha

$$V = \int_a^b E(r)\,dr = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\lambda \ln\frac{b}{a}$$

Invertendo la relazione trovata si determina λ in funzione di V:

$$\lambda = 2\pi\varepsilon_0\frac{V}{\ln(b/a)}$$

Quesito n. 2 – Campo elettrostatico.

Sostituendo l'espressione di λ in quella del campo trovata sopra si ha – in termini vettoriali –

$$\vec{E}(r) = \frac{V}{\ln(b/a)}\,\frac{1}{r}\,\hat{e}_r$$

Nota: il campo elettrostatico ha solo componente radiale.

Quesito n. 3 – Campo magnetico.

Sfruttando ancora la simmetria cilindrica si determina il campo magnetico con il teorema di Ampère ottenendo il campo di un filo indefinito percorso da corrente $I = V/R$:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{e}_\varphi = \frac{\mu_0 V}{2\pi R}\,\frac{1}{r}\,\hat{e}_\varphi$$

Nota: il campo magnetico ha solo componente tangenziale.

Quesito n. 4 – Vettore di Poynting.

Per quanto sopra, e ricordando che $\hat{e}_r \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z$, il vettore di Poynting ha solo componente assiale ed è diretto nello stesso verso della corrente nel filo, cioè dalla batteria verso la resistenza.

$$\vec{S}(r) = \frac{V^2}{2\pi\, R\, \ln(b/a)} \frac{1}{r^2}\; \hat{e}_z$$

Osservato che i campi (e quindi anche il vettore $\vec{S}$) sono diversi da zero solo nel materiale isolante, cioè nell'intercapedine tra i due conduttori, e che il vettore di Poynting è normale alla superficie considerata, il flusso si determina integrandone il modulo su una corona circolare di raggi a e b; seguendo il suggerimento dato

$$\Phi(\vec{S}) = \int S(r)\, ds = \int_a^b \frac{V^2}{2\pi\, R\, \ln(b/a)} \frac{1}{r^2}\, 2\pi\, r\, dr = \frac{V^2}{R\, \ln(b/a)} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{V^2}{R} = V\, I = RI^2$$

Quesito n. 5 – Interpretazione.

Da quanto sopra si può dedurre che il vettore di Poynting esprime il trasporto dell'energia associata ai campi elettrico e magnetico, infatti il suo flusso attraverso la sezione del cavo coassiale corrisponde esattamente alla potenza erogata dal generatore di f.e.m. ed assorbita (e quindi dissipata in calore) dalla resistenza.

Materiale prodotto dal gruppo

PROGETTO OLIMPIADI

Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica

presso Liceo Scientifico "U. Morin"

VENEZIA MESTRE

fax: 041.584.1272

e-mail: `olifis@libero.it`

La Gara Nazionale è realizzata con il sostegno di

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Comune di Senigallia

Liceo Scientifico "E. Medi" di Senigallia

Zanichelli editore