

OLIMPIADI DI FISICA

Senigallia – 18 Aprile 2008

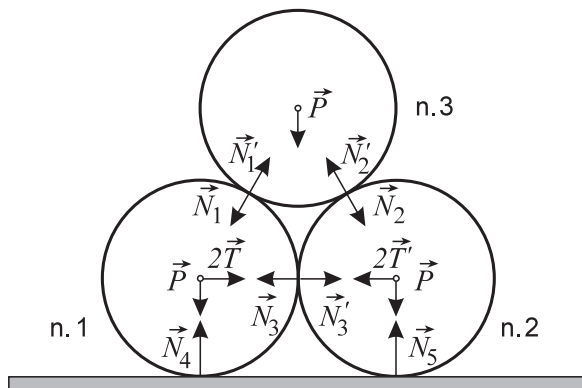
Gara Nazionale: SOLUZIONE della Prova Teorica

PROBLEMA n. 1 – Tre Cilindri molto scivolosi

100 Punti

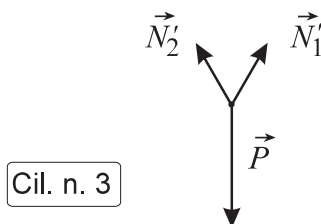
Quesito n. 1.

La figura qui sotto rappresenta il sistema di forze agenti sui tre cilindri identificati come n. 1, 2 e 3: ad essa si fa riferimento per i simboli.



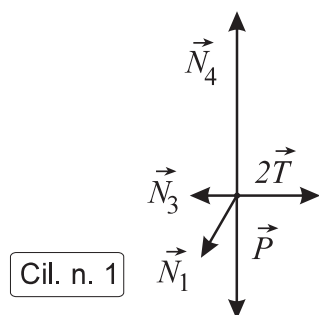
NOTA: per motivi di chiarezza le intensità delle forze in questa figura non sono riprodotte in scala.

Nelle figure seguenti sono mostrati i diagrammi di corpo libero dei cilindri n. 3 e n. 1 (quello per il cilindro n. 2 è simmetrico del secondo). Le forze \vec{N}_1 e \vec{N}_2 e le loro reazioni, \vec{N}'_1 e \vec{N}'_2 (che, per il terzo principio della dinamica, sono rispettivamente uguali in modulo alle prime, con verso opposto) sono inclinate di 60° sul piano orizzontale dato che il triangolo che ha per vertici i centri delle sezioni circolari dei cilindri in contatto tra loro è chiaramente equilatero; ne segue che le loro proiezioni, orizzontale e verticale, si ottengono moltiplicando i moduli rispettivamente per $\cos 60^\circ = 1/2$ e $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$.



Detto $\vec{P} = M\vec{g}$ il peso di ogni cilindro, le condizioni di equilibrio del cilindro n. 3, tenendo conto che per simmetria $N_1 = N_2$, portano all'equazione seguente, relativa alla componente verticale delle forze

$$2 \frac{\sqrt{3}}{2} N_1 - P = 0. \quad \text{Quindi} \quad N_1 = \frac{P}{\sqrt{3}}.$$



Cil. n. 1

Per l'equilibrio del sistema basta studiare il cilindro n. 1 essendo il sistema di forze equivalente a quello del cilindro n. 2. La condizione di equilibrio per traslazioni orizzontali è sufficiente per determinare la tensione T in ciascuna delle due corde.

$$2T - N_3 - \frac{1}{2}N_1 = 0 \quad \text{da cui} \quad 2T - N_3 = \frac{P}{2\sqrt{3}}.$$

Il valore minimo di T si ha per $N_3 = 0$ per cui

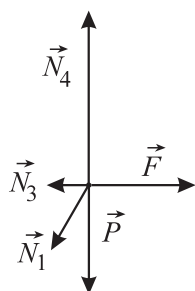
$$T_{\min} = \frac{P}{4\sqrt{3}}.$$

Quesito n. 2.

In assenza di attrito, poiché le rette d'azione di tutte le forze presenti tra i cilindri e tra il piano e i cilindri intersecano gli assi di ciascun cilindro, tutti i momenti assiali sono nulli; se dunque inizialmente i cilindri sono in quiete, non si avrà nessun moto rotatorio: i tre cilindri traslano senza rotolare.

Poiché si assume che il sistema accelerato non collassi, esso si muove rigidamente e dunque, per il secondo principio, l'accelerazione a può essere subito determinata essendo $F = 3Ma$.

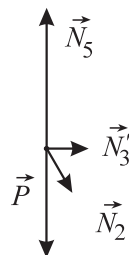
Si considerano poi le equazioni di moto, separatamente per ciascun cilindro (per i simboli fare riferimento ai relativi diagrammi di corpo libero), come segue. Rispetto al caso statico studiato prima, il sistema di forze non è più simmetrico: adesso le reazioni vincolari non hanno lo stesso modulo, mentre, per il principio di azione e reazione, resta vero che $N_1 = N'_1$, $N_2 = N'_2$, $N_3 = N'_3$.



Cil. n. 1

Per il cilindro n. 1

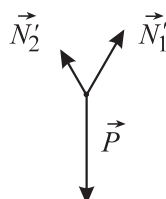
$$\begin{cases} F - N_3 - \frac{1}{2}N_1 = Ma \\ N_4 - P - \frac{\sqrt{3}}{2}N_1 = 0 \end{cases}$$



Cil. n. 2

Per il cilindro n. 2

$$\begin{cases} N'_3 + \frac{1}{2}N_2 = Ma \\ N_5 - P - \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 = 0 \end{cases}$$



Cil. n. 3

Per il cilindro n. 3

$$\begin{cases} \frac{1}{2}N'_1 - \frac{1}{2}N'_2 = Ma \\ \frac{\sqrt{3}}{2}N'_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}N'_1 - P = 0 \end{cases}$$

L'insieme delle 6 equazioni costituiscono un sistema nelle incognite N_1, \dots, N_5 ed a . Quest'ultima, anche senza la considerazione fatta sopra, si sarebbe potuta trovare sommando membro a membro le tre equazioni relative alle componenti orizzontali del moto (le prime di ogni coppia), per cui si può sostituire $Ma = F/3$

Il sistema di forze sul cilindro n. 3 consente di ricavare N_1 e N_2 . Risolvendo il sistema, infatti, si trova

$$N_1 = \frac{P}{\sqrt{3}} + \frac{F}{3} \qquad N_2 = \frac{P}{\sqrt{3}} - \frac{F}{3}$$

Una prima condizione su F si ottiene allora osservando che il sistema non collassa se risulta $N_2 > 0$. Da qui si ricava $F < \sqrt{3}P$.

La seconda condizione su F si ottiene dalle equazioni del moto di uno degli altri due cilindri. In particolare, dall'equazione della componente orizzontale del moto del cilindro n. 2, si ricava

$$N_3 = \frac{F}{3} - \frac{N_2}{2} = \frac{F}{2} - \frac{P}{2\sqrt{3}}$$

Anche in questo caso deve essere $N_3 > 0$. Da qui si ricava $F > \frac{P}{\sqrt{3}}$.

In conclusione, il sistema non collassa se viene accelerato nel modo descritto da una forza F tale che

$$\frac{Mg}{\sqrt{3}} < F < \sqrt{3}Mg.$$

————— • —————

| |
|--|
| PROBLEMA n. 2 – Tri-ciclo. . . termodinamico |
|--|

35 Punti

Il rendimento η di una macchina termica è dato dal rapporto tra il lavoro netto scambiato nel ciclo e il calore assorbito. Il lavoro si calcola come segue.

Nell'isoterma quasi statica 1-2, essendo $V_2 = 2V_1$, il lavoro è dato da:

$$\mathcal{L}_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = p_1 V_1 \ln 2$$

Nel raffreddamento isobaro quasi statico 2-3, tenendo conto del fatto che $p_2 = p_1/2$ e $V_3 = V_1$, il lavoro è:

$$\mathcal{L}_{23} = \int_{V_2}^{V_3} p_2 dV = p_2(V_3 - V_2) = -\frac{1}{2} p_1 V_1$$

Infine, nell'isocora 2-3, il lavoro è nullo. Il lavoro netto del ciclo risulta quindi:

$$\mathcal{L}_{\text{ciclo}} = p_1 V_1 \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)$$

Si calcola ora il calore assorbito nel ciclo: il sistema assorbe calore nell'espansione isoterma 1-2 e nel riscaldamento isocoro 3-1.

Nell'espansione isoterma, poiché l'energia interna di un gas perfetto dipende solo dalla temperatura, $\Delta U = 0$, e dunque $Q_{12} = \mathcal{L}_{12}$.

Nel riscaldamento isocoro, $\mathcal{L} = 0$, e dunque $Q = \Delta U = nc_V \Delta T$.

Poiché il gas è monoatomico, $c_V = (3/2)R$ e risulta

$$Q_{31} = \frac{3}{2} n R \Delta T$$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti, tenendo conto che il volume non varia, si ha $V \Delta p = n R \Delta T$ e dunque

$$Q_{31} = \frac{3}{2} V_1 \Delta p = \frac{3}{4} V_1 p_1$$

In definitiva:

$$Q_{\text{ass}} = Q_{12} + Q_{31} = p_1 V_1 \left(\ln 2 + \frac{3}{4} \right)$$

Infine il rendimento risulta:

$$\eta = \frac{\mathcal{L}_{\text{ciclo}}}{Q_{\text{ass}}} = \frac{\ln 2 - 1/2}{\ln 2 + 3/4} = 0.134 \equiv 13.4 \%$$

PROBLEMA n. 3 – Prove di elasticità

100 Punti

Quesito n. 1.

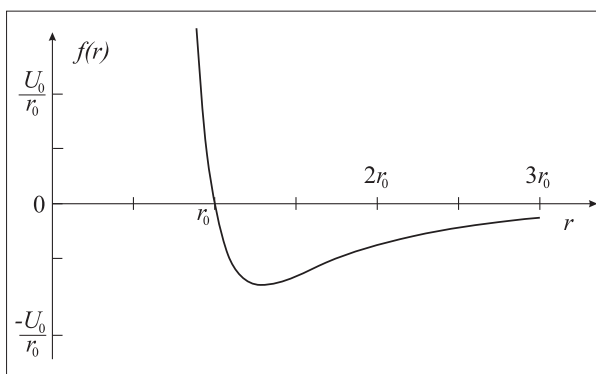
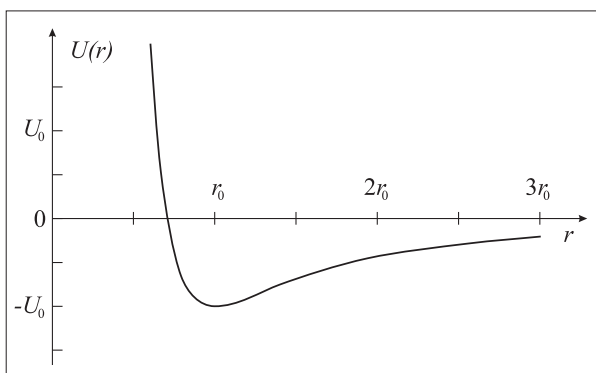
Si riportano qui a fianco i grafici richiesti.

Quello dell'energia potenziale $U(r)$ può essere tracciato – in modo qualitativo – calcolando direttamente la funzione per una decina di valori del rapporto r/r_0 , oppure disegnando separatamente i due rami iperbolici ($1/r^2$ e $1/r^4$) e valutando “graficamente” la differenza, o ancora con uno studio semplificato di funzione (casi limite, asintoti, massimi e minimi).

Dalla definizione di differenza di energia potenziale, come l'opposto del lavoro della forza al variare della distanza r , che per spostamenti infinitesimi si scrive $\delta U = -\vec{F} \cdot \delta \vec{r}$, si può dedurre la relazione inversa che serve in questo caso per determinare la forza interatomica:

$$f(r) = -\frac{dU(r)}{dr} = 4 U_0 \frac{r_0^4}{r^5} - 4 U_0 \frac{r_0^2}{r^3}.$$

Il grafico della forza si può quindi ottenere semplicemente considerando la derivata, cioè osservando nel primo grafico la pendenza e i punti di minimo e di flesso, o altrimenti si può utilizzare l'espressione esplicita della forza, in analogia con quanto fatto con quello dell'energia.



Quesito n. 2.

Da quanto sopra si evince che per $r = r_0$ l'energia potenziale ha un minimo, e la forza è nulla. Questa è pertanto la distanza di equilibrio (stabile).

Nell'espressione precedente della forza il primo termine è repulsivo e il secondo è attrattivo; siccome il primo termine è maggiore del secondo in valore assoluto quando $r < r_0$, l'interazione è repulsiva per $r < r_0$ e attrattiva per $r > r_0$. In condizioni di equilibrio l'energia potenziale interatomica è $-U_0$.

In un modello più realistico gli esponenti sarebbero più alti, ma il modello è stato qui scelto in modo da essere facilmente trattabile.

Quesito n. 3.

A seguito dell'applicazione di una forza esterna, il cristallo si deforma spostandosi dalla condizione di equilibrio, ed ogni distanza interatomica *nella direzione della forza* passa da r_0 a $r = r_0 + \delta$ (nelle direzioni ortogonali alla forza la distanza interatomica rimane r_0 perché non ci sono interazioni coi secondi vicini). In tal modo si esercita una forza che bilancia complessivamente quella esterna.

Per studiare le piccole deformazioni si ponga $r = r_0 + \delta$ con $\delta \ll r_0$; si trascurano poi i termini in $(\delta/r_0)^2$ rispetto a quelli in δ/r_0 . La forza diviene

$$f = 4 U_0 \frac{r_0^4}{(r_0 + \delta)^5} - 4 U_0 \frac{r_0^2}{(r_0 + \delta)^3}$$

e sviluppando i binomi di Newton a denominatore e fermandosi al prim'ordine in δ/r_0 , si ha

$$f \approx 4 U_0 \frac{1}{r_0(1 + 5\delta/r_0)} - 4 U_0 \frac{1}{r_0(1 + 3\delta/r_0)}.$$

Nello stesso ordine di approssimazione si può scrivere che

$$\frac{1}{1 + 5\delta/r_0} \approx 1 - 5\frac{\delta}{r_0} \quad \text{e analogamente per l'altro termine.}$$

Si poteva giungere a questa espressione anche in un solo passo essendo, $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ con $\alpha = -5$.

Si ottiene quindi

$$f \approx \frac{4 U_0}{r_0} \left[\left(1 - 5\frac{\delta}{r_0} \right) - \left(1 - 3\frac{\delta}{r_0} \right) \right] = -\frac{8 U_0 \delta}{r_0^2}.$$

Ogni legame viene allungato di una quantità δ nella direzione di applicazione della forza esterna, quindi $\Delta L/L = \delta/r_0$. Le forze f interne si bilanciano, e rimangono le forze esterne al bordo del cristallo, che si sommano in proporzione al numero n di legami per unità di superficie; essendo $F = n A f$ ed $n = 1/r_0^2$ si ha

$$\frac{F}{A} = \frac{|n f|}{A} = \frac{|f|}{r_0^2} \quad \text{da cui segue che} \quad E = \frac{|f/r_0^2|}{\delta/r_0} = \frac{8 U_0}{r_0^3}.$$

Sostituendo i valori numerici e ricordando che $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$, si ha $E = 2.37 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$. L'ordine di grandezza ottenuto è ragionevole (per l'acciaio è $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$).

Quesito n. 4.

Per trovare le condizioni di rottura, si può osservare che per valori molto grandi di r la forza f tende a zero, per cui occorre trovare quando l'intensità della forza interatomica attrattiva f ha un massimo in funzione di r : al di là non può più compensare la forza esterna e il cristallo si spezza. Questa condizione si ha quando

$$\frac{df}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 U_0 \frac{r_0^4}{r^6} - 12 U_0 \frac{r_0^2}{r^4} = 0 \quad \text{cioè} \quad r = \sqrt{5/3} r_0 \approx 1.291 r_0.$$

La deformazione, o allungamento relativo, in queste condizioni è

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{r - r_0}{r_0} \approx 0.291.$$

Naturalmente questo valore non è realistico perché un solido reale contiene sempre impurezze che ne determinano la rottura prima.

Quesito n. 5.

A questo punto per ottenere lo sforzo di rottura basta sostituire $r = \sqrt{5/3} r_0$ nella formula di f e poi ricordare che lo sforzo è $F/A = |f|/r_0^2$.

Si ottiene quindi

$$f = \frac{4U_0}{r_0} \left[\left(\frac{3}{5} \right)^{5/2} - \left(\frac{3}{5} \right)^{3/2} \right] = -0.7436 \frac{U_0}{r_0}$$

e in ultima analisi

$$F/A = 0.7436 (U_0/r_0^3) = 2.2 \times 10^{10} \text{ N/m}^2.$$

Anche questo valore non è realistico per la stessa ragione precedente (per l'acciaio è 50 volte meno, ma l'acciaio non è cristallino).

PROBLEMA n. 4 – Condensatori sempre più piccoli

65 Punti

Quesito n. 1.

In un condensatore sferico, detta Q la carica distribuita uniformemente sul conduttore interno di raggio R_1 , il campo tra le armature si determina applicando il teorema di Gauss^(*)

$$\oint_{S(r)} \vec{E} \cdot \hat{n} \, ds = \oint_{S(r)} E(r) \, ds = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

e la d.d.p. tra le armature, direttamente dalla definizione, essendo R_2 il raggio del conduttore sferico esterno.

$$V = V(R_1) - V(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} E(r) \, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Si ricava quindi la capacità

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{1/R_1 - 1/R_2} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Ponendo adesso $R_1 = R$ e $R_2 = R + \delta R$ con $\delta R \ll R$ si ottiene

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R(R + \delta R)}{R + \delta R - R} \approx \varepsilon_0 \frac{4\pi R^2}{\delta R} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

che coincide appunto con l'espressione della capacità di un condensatore piano nel vuoto.

Quesito n. 2.

La capacità del condensatore e la tensione di lavoro sono date da

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} \quad V \leq V_{\max} = E_m d$$

Posto $\Delta = 2Sd$ da cui $S = \Delta/(2d)$

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\Delta}{2d^2} \quad \text{con} \quad d^2 \geq \frac{V_{\max}^2}{E_m^2}$$

per cui, eliminando d , si ottiene

$$C \leq \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{E_m^2 \Delta}{2V_{\max}^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq \Delta_{\min} = \frac{2C V_{\max}^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r E_m^2}$$

(*) Il simbolo \oint indica che l'integrale di superficie viene calcolato su una superficie chiusa, in questo caso una sfera di raggio r .

Quesito n. 3.

Dall'espressione precedente si deduce che per ottenere il volume minimo, a parità di capacità e tensione massima di lavoro, occorre massimizzare il prodotto $\varepsilon_r E_m^2$. Dall'analisi della tabella che segue si ricava che tra i materiali citati quello che consente di realizzare condensatori più piccoli è la *mica*.

| Materiale | ε_r | E_m [kV/mm] | $\varepsilon_r E_m^2$ [$10^{15} \text{ V}^2/\text{m}^2$] |
|----------------------|-----------------|---------------|--|
| 1. Carta paraffinata | 2.5 | 50 | 6.25 |
| 2. Ceramica | 60 | 15 | 13.5 |
| 3. Mica | 8 | 90 | 64.8 |
| 4. Polistirolo | 2.6 | 50 | 6.50 |
| 5. Porcellana | 6 | 25 | 3.75 |
| 6. Resina epossidica | 4 | 35 | 4.90 |
| 7. Teflon | 2.2 | 20 | 0.88 |

Quesito n. 4.

Invertendo la relazione precedente si trova

$$\varepsilon_r E_m^2 = \frac{2 C V_{\max}^2}{\varepsilon_0 \Delta} = 13.3 \times 10^{15} \text{ V}^2/\text{m}^2$$

Appare ragionevole che il condensatore sia *ceramico*, dato che utilizzando la mica avrebbe potuto essere ancora più piccolo.

————— ■ —————

Materiale prodotto dal gruppo

| | |
|---|--|
|  | <p style="margin: 0;">PROGETTO OLIMPIADI</p> <p style="margin: 0;">Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica</p> <p style="margin: 0;">presso Liceo Scientifico "U. Morin"</p> <p style="margin: 0;">VENEZIA MESTRE</p> <p style="margin: 0;">fax: 041.584.1272</p> <p style="margin: 0;">e-mail: olifis@libero.it</p> |
|---|--|