Associazione per l'Insegnamento della Fisica

Olimpiadi di FISICA 2011

GARA NAZIONALE
Prova Teorica

Venerdì 29 Aprile 2011
Liceo Scientifico "E. Medi"
Senigallia (AN)

Soluzioni

PROBLEMA n. 1 – Sistema trasportatore a rulli

85 Punti

Quesito n. 1.

Si consideri il punto di contatto tra un generico rullo e la lastra. Affinché essa non slitti la sua velocità deve essere uguale a quella tangenziale nel punto di contatto; quindi

$$v = \omega R$$

Poiché v è la stessa in ogni punto della lastra, ω è uguale per tutti i rulli.

Quesito n. 2.

Poiché non c'è slittamento, tra un urto e l'altro l'energia si conserva; inoltre, sempre tra un urto e l'altro, la variazione di energia potenziale gravitazionale è pari a $2MgR \operatorname{sen} \alpha$. Nel calcolare l'energia cinetica si deve tenere conto della velocità traslazionale della lastra e di quella rotazionale dei rulli, ognuno dei quali ha momento d'inerzia $I = mR^2/2$.

$$E'_n = \frac{1}{2}\left(Mv_n'^2 + 2NI\omega_n'^2\right) \qquad E_{n+1} = \frac{1}{2}\left(Mv_{n+1}^2 + 2NI\omega_{n+1}^2\right) - 2MgR \operatorname{sen} \alpha$$

Usando $\omega = v/R$ e $E'_n = E_{n+1}$ si ha

$$(M + Nm)\, v_n'^2 = (M + Nm)\, v_{n+1}^2 - 4MgR \operatorname{sen} \alpha \quad \Rightarrow \quad v_{n+1}^2 - v_n'^2 = \frac{4MgR \operatorname{sen} \alpha}{M + Nm}$$

Quesito n. 3.

Si indichi con Δp e con Δp_c rispettivamente la variazione della quantità di moto della lastra causata dal rullo urtato e da ognuno dei $2N - 1$ rulli a contatto con la lastra. Si indichi inoltre con ΔJ e ΔJ_c rispettivamente la variazione del momento angolare del rullo fermo e di ognuno dei $2N - 1$ rulli in rotazione a contatto con la lastra.

Il momento angolare di un corpo rigido si può esprimere come $J = I\omega$ dove I rappresenta il momento d'inerzia e ω la velocità angolare.

In un urto, tra la lastra ed i rulli si sviluppano delle forze impulsive parallele alla direzione del moto (forze d'attrito).

L'impulso delle forze che i rulli esercitano sulla lastra fa cambiare la quantità di moto della lastra

$$M\,(v'_n - v_n) = \Delta p + (2N - 1)\Delta p_c$$

Si noti che Δp e Δp_c hanno segno opposto.

La variazione della quantità di moto della lastra prodotta dai singoli rulli è legata alla variazione del momento angolare di ogni rullo. Infatti la variazione di q.d.m. della lastra è data da

$$\Delta p = \int f\, dt$$

dove f è la forza applicata da un rullo alla lastra. Nel caso di forza impulsiva l'integrale è esteso ad un intervallo temporale trascurabile, ma la variazione di q.d.m. risulta comunque finita.

Il momento dell'impulso delle forze f' che la lastra esercita su ogni singolo rullo in un punto della superficie, che per il terzo principio della dinamica hanno la stessa intensità, la stessa direzione e verso opposto, fa cambiare il momento angolare dei rulli: precisamente fa diminuire il momento angolare di $2N-1$ rulli ed aumentare il momento angolare del rullo che viene messo in moto. Ne segue che la variazione di momento angolare del rullo risulta

$$\Delta J = \int f' R\, dt = -R \int f\, dt = -R\Delta p$$

Si ha dunque $I\left(\omega_n' - \omega_n\right) = \Delta J = -R\Delta p \quad \Rightarrow \quad I\omega_n' = -R\Delta p$

e $I\left(\omega_{c,n}' - \omega_{c,n}\right) = \Delta J_c = -R\Delta p_c$

Sostituendo le ultime due espressioni nella prima si ottiene

$$M\left(v_n' - v_n\right) = -\frac{I\omega_n'}{R} - (2N-1)\frac{I\left(\omega_n' - \omega_n\right)}{R}$$

Ricordando che $\omega = v/R$ e che $I = mR^2/2$ e sviluppando i calcoli si ricava infine

$$v_n' = \frac{2M + (2N-1)m}{2M + 2Nm} v_n = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{m}{M + Nm}\right) v_n$$

Quesito n. 4.

Combinando i risultati dei due punti precedenti

$$v_{n+1}^2 - {v_n'}^2 = \frac{4MgR\,\mathrm{sen}\,\alpha}{M + Nm} \quad \text{e} \quad v_n' = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{m}{M + Nm}\right) v_n$$

si ricava

$$v_{n+1}^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{m}{M + Nm}\right)^2 v_n^2 + \frac{4MgR\,\mathrm{sen}\,\alpha}{M + Nm}$$

e con la relazione data nel testo $M/m = 8$, si ottiene

$$v_{n+1}^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{8 + N}\right)^2 v_n^2 + \frac{32}{8 + N} gR\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Raggiungere una velocità limite significa $v_{n+1} = v_n = v_\ell$ e dalla espressione precedente si ricava

$$v_\ell^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{8 + N}\right)^2 v_\ell^2 + \frac{32}{8 + N} gR\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

da cui

$$v_\ell = (64 + 8N)\sqrt{\frac{2gR\,\mathrm{sen}\,\alpha}{(31 + 4N)(8 + N)}}$$

Sostituendo questo risultato nella relazione tra v_n' e v_n ricavata nel quesito precedente, si ottiene

$$v_\ell' = (60 + 8N)\sqrt{\frac{2gR\,\mathrm{sen}\,\alpha}{(31 + 4N)(8 + N)}}$$

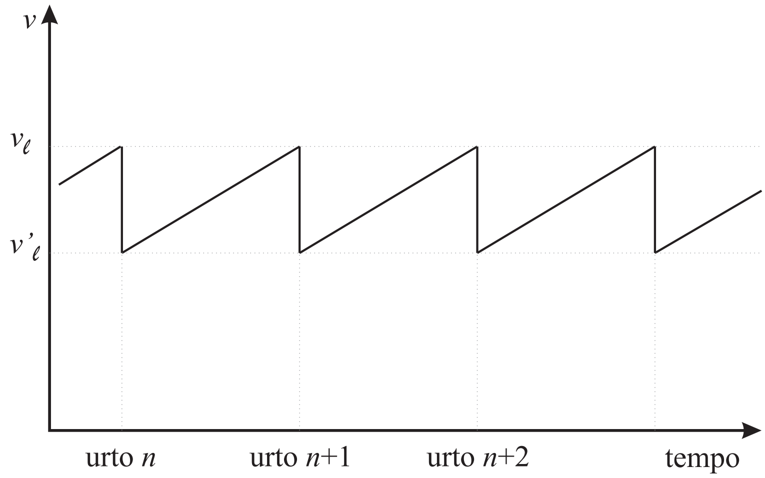
Quesito n. 5.

Si ha

$$\Delta v_\ell = v_\ell - v_\ell' = 4\sqrt{\frac{2gR\,\mathrm{sen}\,\alpha}{(31 + 4N)(8 + N)}}$$

Quesito n. 6.

Vedi grafico a fianco.



PROBLEMA n. 2 – Nuclei speculari

85 Punti

Quesito n. 1.

Abbiamo:

$$\delta = \frac{Am}{(4/3)\pi R^3} \quad \text{da cui} \quad R = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\delta}}\, A^{1/3} \qquad \text{Quindi:} \quad R_0 = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\delta}} \quad \text{e} \quad \alpha = 1/3$$

Quesito n. 2.

Per calcolare l'energia potenziale elettrostatica di una sfera uniformemente carica si immagini di "assemblare" la sfera per aggiunta di successivi gusci sferici infinitesimi. Si supponga allora di avere una sfera uniformemente carica (con densità volumica di carica ρ), di raggio r. Il potenziale di questa sfera (ponendo $V_\infty = 0$) è:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(r)}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(4/3)\pi r^3\,\rho}{r} = \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0}$$

Si immagini ora di aggiungere a questa sfera, trasportandolo dall'infinito, un guscio carico infinitesimo, di raggio r e spessore dr. La carica dq del guscio risulta:

$$4\pi r^2\, dr\, \rho$$

L'aumento di energia potenziale elettrostatica sarà:

$$dU_\mathrm{e} = [V(r) - V_\infty]\; dq = \frac{4\pi\,\rho^2\, r^4}{3\varepsilon_0}\, dr$$

Integrando questa espressione si otterrà l'energia potenziale richiesta:

$$U_\mathrm{e} = \int_0^R dU_\mathrm{e} = \frac{4\pi\,\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^R r^4\, dr = \frac{4\pi\,\rho^2\, R^5}{15\,\varepsilon_0}$$

In alternativa si può calcolare questa energia sia integrando la densità di energia del campo elettrostatico, sia usando l'espressione più generale dell'energia di configurazione di un sistema di cariche con distribuzione continua. Nel primo caso occorre preliminarmente trovare (con il teorema di Gauss) le espressioni del campo internamente ed esternamente alla sfera di raggio R, nel secondo caso quella del potenziale e.s. nei soli punti interni. In sintesi:

- Attraverso la densità di energia $u = 1/2\;\varepsilon_0 E^2$:

$$U_\mathrm{e} = \int_0^\infty u\, dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_0^R E_1^2\, dv + \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_R^\infty E_2^2\, dv \quad \text{con} \quad E_1 = \frac{\rho\, r}{3\varepsilon_0} \qquad E_2 = \frac{\rho\, R^3}{3\varepsilon_0\, r^2} \qquad dv = 4\pi r^2\, dr$$

- Come energia di configurazione

$$U_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\int_0^R V(r)\, dq = \frac{1}{2}\int_0^R V(r)\,\rho\, dv \quad \text{con} \quad dv = 4\pi r^2\, dr \quad \text{e}$$

$$V(r) = \int_r^\infty E\, dr = \int_r^R E_1\, dr + \int_R^\infty E_2\, dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^2 - r^2}{2} + \frac{\rho\, R^2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2}R^2 - r^2\right)$$

Tenendo conto del fatto che $\rho = Ze/(4/3)\pi R^3$ si ha infine

$$U_\mathrm{e} = \frac{3}{20\pi\,\varepsilon_0}\frac{(Ze)^2}{R} = \frac{3\,e^2}{20\pi\,\varepsilon_0\, R_0}\frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

quindi

$$\beta = \frac{3\,e^2}{20\pi\,\varepsilon_0\, R_0}; \qquad \gamma = -1/3 \qquad (*)$$

Quesito n. 3.

Nel caso di nuclei speculari, A è lo stesso per i due membri della coppia, e il termine $A-2Z$ vale $+1$ per uno dei due e -1 per l'altro. Ne segue immediatamente che:

$$E_{\ell,1} - E_{\ell,2} = U_{e,2} - U_{e,1}$$

dove l'espressione dell'energia e.s. trovata sopra viene modificata in $U_e = \beta \dfrac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$

Considerando adesso due nuclei speculari, con $Z_2 = Z_1 + 1$, ed essendo $N_1 = Z_2$ si ha $A = 2Z_1 + 1$ e quindi

$$E_{\ell,1} - E_{\ell,2} = \beta \frac{[Z_2(Z_2-1) - Z_1(Z_1-1)]}{A^{1/3}} = \beta \frac{2Z_1}{A^{1/3}} = \beta \frac{A-1}{A^{1/3}}$$

Quesito n. 4.

Nella tabella di dati fornita nel testo si aggiungono tre colonne in cui sono riportati rispettivamente i valori dell'espressione $(A-1)/A^{1/3}$, i valori di ΔE_ℓ e il valore di β ricavato da quelli:

A	Nucleo 1	Nucleo 2	$(A-1)/A^{1/3}$	ΔE_ℓ (MeV)	β
35	${}^{35}_{17}Cl_{18}$ (298.2)	${}^{35}_{18}Ar_{17}$ (291.5)	10.39	6.7	0.649
45	${}^{45}_{22}Ti_{23}$ (385.0)	${}^{45}_{23}V_{22}$ (377.1)	12.37	7.9	0.640
55	${}^{55}_{27}Co_{28}$ (476.8)	${}^{55}_{28}Ni_{27}$ (467.3)	14.20	9.5	0.667
65	${}^{65}_{32}Ge_{33}$ (556.0)	${}^{65}_{33}As_{32}$ (545.9)	15.92	10.1	0.637
75	${}^{75}_{37}Rb_{38}$ (633.6)	${}^{75}_{38}Sr_{37}$ (622.3)	17.55	11.3	0.637

Calcolando la media dei valori riportati nell'ultima colonna, si ottiene una stima del valore di β, pari a 0.648 MeV.

Una stima più accurata può essere ottenuta con il metodo dei minimi quadrati cercando la migliore relazione lineare tra le variabili $x = (A-1)/A^{1/3}$ ed $y = \Delta E_\ell$, come mostrato nel grafico.

Si dovranno calcolare le somme

$$\sum_i x_i y_i = 661.3\,\text{MeV} \qquad \sum_i x_i^2 = 1024.0$$

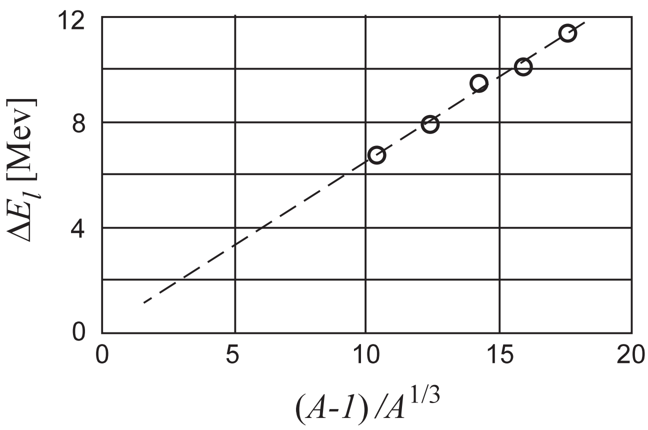
Il valore della costante di proporzionalità è dato da

$$\beta = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} = 0.646\,\text{MeV}$$

Con questo valore, dalla (*) si può infine ottenere una stima di R_0:

$$R_0 = \frac{3\,e^2}{20\pi\varepsilon_0\,\beta} = 1.34\,\text{fm}$$

Il valore comunemente accettato, ricavato con molti metodi diversi, è 1.25 fm: l'errore è del 7.2 %.



Quesito n. 5.

La densità di massa risulta: $\delta = \dfrac{3m}{4\pi R_0^3} = 1.88 \times 10^{28}\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$

La densità di carica del nucleo: $\rho = \dfrac{3Ze}{4\pi R_0^3\,A} = 8.17 \times 10^{24}\,\text{C}\,\text{m}^{-3}$

Questi valori vanno intesi solo come stime approssimative.

PROBLEMA n. 3 – Ancora il campo elettrostatico radiale di modulo uniforme!

85 Punti

Nota: parlando di campo e potenziale è sempre sottinteso l'attributo "elettrostatico".

Quesito n. 1.

Le cariche superficiali si determinano immediatamente con l'uso del teorema di Coulomb (applicazione del teorema di Gauss) considerando che il campo (o meglio la sua componente radiale) è discontinuo nell'attraversamento delle due superfici.

$$\varepsilon_0\,\Delta E_\perp = \sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma(R) = \varepsilon_0\,E_0 \quad \text{e} \quad \sigma(2R) = -\varepsilon_0\,E_0$$

In alternativa si può usare direttamente il teorema di Gauss: detta $Q(r)$ la carica contenuta nella sfera di raggio generico r, essa è pari a $\varepsilon_0\,\Phi(r) = 4\pi\varepsilon_0 r^2\,E_0$.

La carica sulla superficie interna si trova facendo il limite di $Q(r)$ per $r \to R^+$, mentre quella sulla superficie esterna per differenza tra la carica totale (nulla) e quella positiva fino a $r \to (2R)^-$; quindi

$$Q_1 = \lim_{r\to R^+} Q(r) = 4\pi\varepsilon_0 R^2\,E_0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R^2} = \varepsilon_0\,E_0$$

$$Q_2 = 0 - \lim_{r\to 2R^-} Q(r) = -4\pi\varepsilon_0 (2R)^2\,E_0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi(2R)^2} = -\varepsilon_0\,E_0$$

Quesito n. 2.

Per quanto sopra, dette $Q_1, Q_{\rm sp}, Q_2$ le cariche superficiali e spaziale, deve essere

$$Q_1 + Q_{\rm sp} + Q_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{\rm sp} = -Q_2 - Q_1 = 4\pi\varepsilon_0\left((2R)^2 - R^2\right)E_0 = 12\pi\varepsilon_0 R^2\,E_0$$

La carica spaziale (o volumetrica) occupa il volume $\mathcal{V} = (4/3)\pi((2R)^3 - R^3) = (28/3)\pi R^3$ per cui la densità **media** è

$$<\!\rho\!> = \frac{Q_{\rm sp}}{\mathcal{V}} = \frac{12\pi\varepsilon_0 R^2\,E_0}{(28/3)\pi R^3} = \frac{9\,\varepsilon_0\,E_0}{7R}$$

Quesito n. 3.

Poiché la carica non è distribuita uniformemente (ma dipende solo dalla distanza r, ovvero $\rho = \rho(r)$, occorre applicare il teorema di Gauss ad uno strato di spessore infinitesimo (trascurando termini di ordine superiore al primo):

$$\Phi = 4\pi(r+dr)^2\,E_0 - 4\pi r^2\,E_0 = 8\pi r\,dr E_0 + O(dr^2)$$

$$dq = \rho(r)\,dv = 4\pi r^2\,dr\,\rho(r) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 8\pi r\,dr E_0 = 4\pi r^2\,dr\,\rho(r)/\varepsilon_0$$

e infine

$$\rho(r) = \frac{2\varepsilon_0\,E_0}{r} = \rho_0\,\frac{R}{r} \quad \text{con} \quad \rho_0 = \frac{2\varepsilon_0\,E_0}{R}$$

Quesito n. 4.

Il calcolo del potenziale è immediato, essendo $V(R_2) = 0$ per $r \geq 2R$ a causa del campo esterno nullo.

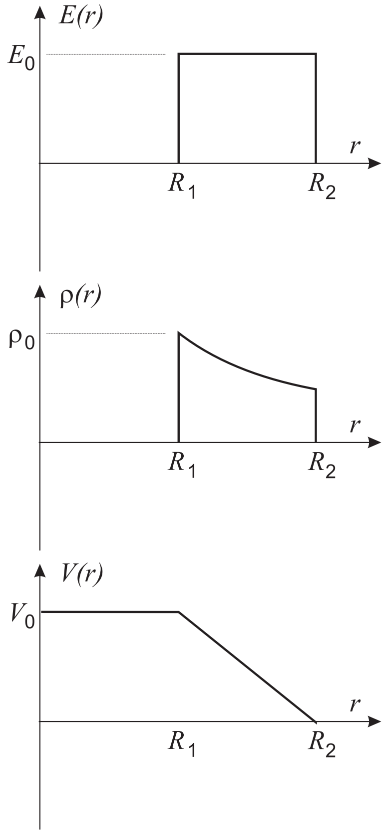
Per definizione

$$V(r) = \int_r^{\infty} E(r)\,dr = \int_r^{2R} E_0\,dr = (2R - r)\,E_0$$

espressione valida per $R < r < 2R$. Nei punti interni alla prima sfera il potenziale è uniforme, dato che il campo è nullo, ed è pari a

$$V_0 = V(R) = R\,E_0\,.$$

I grafici richiesti sono riportati a fianco.



Quesito n. 5.

Trattandosi di una campo di forze centrale si conserva il momento angolare, perpendicolare al piano individuato dalla posizione $\vec{r}_0$ e velocità $\vec{v}_o$ iniziali. Pertanto la traiettoria deve stare tutta sul medesimo piano.

In alternativa si può riconoscere che la forza è sempre nello stesso piano e dunque non può mai esserci una componente perpendicolare di accelerazione, tale da portare la particella fuori dello stesso piano.

Quesito n. 6.

Alla distanza minima r (si omette il pedice per semplicità) la particella si muove con velocità incognita di modulo v. Occorre quindi impostare un sistema di due equazioni: una è fornita dalla conservazione dell'energia, l'altra dalla conservazione del momento angolare

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}mv^2 + qV(r) = \dfrac{1}{2}\,mv_0^2 + qV(2R) \\ mrv = m(2R)v_0\ \operatorname{sen} 45^\circ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} mr^2v^2R + mr^2v_0^2(2R-r) = mr^2v_0^2R \\ rv = 2Rv_0 \operatorname{sen} 45^\circ \end{cases}$$

avendo moltiplicato la prima equazione per $2r^2R$ ed avendo sostituito $2qE_0R = mv_0^2$ per definizione di v_0. Dalla seconda equazione $r^2v^2 = 4R^2v_0^2 \operatorname{sen}^2 45^\circ = 2R^2v_0^2$ che, sostituito nella prima per eliminare l'incognita v dà

$$2R^3v_0^2 + r^2v_0^2(2R-r) = r^2v_0^2R \quad \Rightarrow \quad r^3 - Rr^2 - 2R^3 = 0$$

Nella variabile $z = r/R$ l'equazione da risolvere è

$$f(z) = z^3 - z^2 - 2 = 0 \quad \text{in} \quad 1 < z < 2$$

Si osserva che $f(1) = -2 < 0$, $f(2) = 2 > 0$ e che la derivata $f' = 3z^2 - 2z$ è sempre positiva nell'intervallo considerato: dunque nello stesso intervallo la funzione è continua e crescente per cui ha certamente uno ed un solo zero che può essere determinato ad esempio col metodo dicotomico:

Soluzione numerica dell'equazione $f(z) = 0$ in $1 < z < 2$

valore nel punto medio	nuovo intervallo	nuova posizione
$f(1.500) = -0.8750 < 0$	1.500 – 2.000	1.750 ± 0.250
$f(1.750) = 0.2969 > 0$	1.500 – 1.750	1.625 ± 0.125
$f(1.625) = -0.3496 < 0$	1.625 – 1.750	1.687 ± 0.063
$f(1.687) = -0.0422 < 0$	1.687 – 1.750	1.719 ± 0.031
$f(1.719) = 0.1246 > 0$	1.687 – 1.719	1.703 ± 0.016

La soluzione (a meno dell'1 %) vale $z = 1.70$ per cui $r_{\min} \approx 1.70\,R$.

PROBLEMA n. 4 – Due altoparlanti

45 Punti

Quesito n. 1.

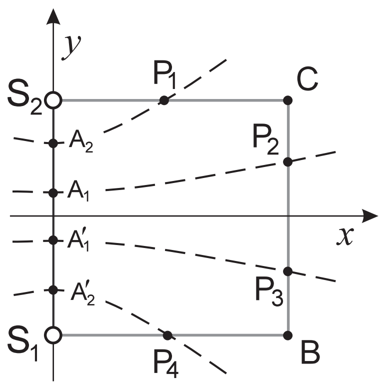
Consideriamo il vertice B. Affinché in esso si abbia il massimo d'intensità del prim'ordine, le onde provenienti dai due altoparlanti devono arrivare in fase. Poiché le sorgenti sono in fase, l'unico sfasamento è quello introdotto dalla differenza di cammino ΔL: in B ci sarà un massimo se $\Delta L = n\lambda$. I massimi del prim'ordine si hanno quando la differenza di cammino è pari a una lunghezza d'onda:

$$d\left(\sqrt{2}-1\right) = \lambda = \frac{v}{\nu} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{v}{d\left(\sqrt{2}-1\right)} = 233\,\mathrm{Hz}$$

Il valore trovato corrisponde ad un La#3.

Si ha interferenza distruttiva, come è noto, quando la differenza di cammino percorso dalle onde sonore è un multiplo dispari di mezze lunghezze d'onda. I punti $\mathrm{P} = (x, y)$ del piano del quadrato in cui si hanno i minimi d'interferenza descrivono il luogo $|\overline{\mathrm{S_1P}} - \overline{\mathrm{S_1P}}| = (2n+1)\,\dfrac{\lambda}{2}$. I punti del piano in cui si ha interferenza distruttiva, dunque, appartengono alle iperboli di un fascio che ha i fuochi nelle sorgenti $\mathrm{S_1}$ ed $\mathrm{S_2}$ e l'asse di simmetria coincidente con l'asse del segmento $\mathrm{S_1S_2}$. I punti da trovare sono quelli d'intersezione tra le iperboli suddette e i lati del quadrato. Il problema è simmetrico e, per risolverlo, si fissa un sistema di riferimento cartesiano con gli assi paralleli ai lati del quadrato e origine nel punto medio del segmento $\mathrm{S_1S_2}$.

I punti d'interferenza distruttiva sull'asse delle ordinate aventi ordinata positiva sono quelli che soddisfano la condizione $x = 0$, $y = (2n+1)\,\dfrac{\lambda}{4}$ con $n = 0, 1, 2, ...$ purché $y < \dfrac{d}{2}$. In questo caso $n = 0, 1$ soltanto e dunque $y_1 = \dfrac{\lambda}{4} = 0.36\,\mathrm{m}$ e $y_2 = \dfrac{3}{4}\lambda = 1.09\,\mathrm{m}$. Considerando che questi sono i vertici delle iperboli d'interferenza distruttiva e che le sorgenti sono nei fuochi, si determinano rapidamente le equazioni dei luoghi cercati. I minimi d'interferenza sono 4 sul segmento $\mathrm{S_1S_2}$, due sul lato BC del quadrato, gli altri due sui lati $\mathrm{S_1B}$ ed $\mathrm{S_2C}$. Indicando con a l'ordinata dei vertici e con c quella dei fuochi, i luoghi hanno l'equazione generale seguente



$$\mathcal{I}: \qquad \left(c^2 - a^2\right) y^2 - a^2 x^2 = \left(c^2 - a^2\right) a^2$$

In particolare, lungo il segmento BC

$$x = d \quad a = \frac{\lambda}{4} = \frac{d}{4}\left(\sqrt{2}-1\right) \quad c = \frac{d}{2} \quad \Rightarrow$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{\left(c^2 - a^2\right) a^2 + a^2 x^2}{c^2 - a^2}} = \pm 0.82\,\mathrm{m}$$

mentre lungo i segmenti $\mathrm{S_1B}$ ed $\mathrm{S_2C}$

$$y = \pm\frac{d}{2} \quad a = \frac{3}{4}\lambda = \frac{3}{4}d\left(\sqrt{2}-1\right) \quad c = \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{\left(c^2 - a^2\right) y^2 - \left(c^2 - a^2\right) a^2}{a^2}} = 1.73\,\mathrm{m}$$

La figura accanto descrive la situazione.

In alternativa i minimi sui segmenti BC, $\mathrm{S_1B}$ ed $\mathrm{S_2C}$ si possono trovare anche senza ricorrere alle iperboli, semplicemente scrivendo la condizione d'interferenza distruttiva, analogamente a quanto s'è fatto per trovare i massimi. Si ottiene, rispettivamente sui lati orizzontali e sul lato verticale,

$$x = \frac{d}{12}\left(13 - 5\sqrt{2}\right) = 1.73\,\mathrm{m} \quad \text{e} \quad y = \pm\frac{d}{4}\sqrt{\frac{114\sqrt{2} - 155}{7}} = \pm 0.82\,\mathrm{m}$$

Quesito n. 2.

Per una sorgente puntiforme di onde tridimensionali, l'intensità è direttamente proporzionale alla potenza della sorgente e inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Poiché la potenza degli altoparlanti è la stessa e l'intensità è, anche, direttamente proporzionale al quadrato dell'ampiezza, si ha

$$I_1\,r_1^2 = I_2\,r_2^2 \quad\Rightarrow\quad A_1^2\,r_1^2 = A_2^2\,r_2^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{A_1}{A_2} = \sqrt{2}$$

Lo sfasamento dipende dalla differenza di cammino di due raggi emessi dalle sorgenti. Si ha

$$\phi = 2\,\pi\,\frac{\Delta L}{\lambda} = 2\,\pi\,\frac{d\left(\sqrt{2}-1\right)}{\lambda} = 2\,\pi\,\frac{d\left(\sqrt{2}-1\right)\nu}{v} = 5.57\,\mathrm{rad}$$

Quesito n. 3.

Sovrapponendo due onde sinusoidali con la stessa frequenza e sfasate di ϕ, si ottiene un'onda sinusoidale con la stessa frequenza, la cui ampiezza è legata alle ampiezze delle due onde componenti dalla relazione $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2\cos\phi$. Questa espressione si ricava facilmente utilizzando la rappresentazione vettoriale delle funzioni d'onda mediante i fasori. Secondo questa rappresentazione, l'ampiezza dell'onda risultante si determina sommando due vettori di modulo A_1 e A_2 che formano un angolo ϕ.

Si può arrivare allo stesso risultato sommando due funzioni d'onda di ampiezza diversa e sfasate di ϕ: $y_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t)$ e $y_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$. Così facendo si ottiene l'onda di ampiezza A e fase iniziale ψ che si vuol determinare.

$$A_1 \operatorname{sen}(\omega\,t) + A_2 \operatorname{sen}(\omega\,t + \phi) = A \operatorname{sen}(\omega\,t + \psi)$$

Sviluppando con la formula di addizione

$$A_1 \operatorname{sen}\omega\,t + A_2\cos\phi \operatorname{sen}\omega\,t + A_2 \operatorname{sen}\varphi\cos\omega\,t = A\cos\psi \operatorname{sen}\omega\,t + A \operatorname{sen}\psi\cos\omega\,t$$

Imponendo l'uguaglianza, prima per $\omega\,t = 0$ e poi per $\omega\,t = \pi/2$,

$$\begin{aligned} A_2 \operatorname{sen}\phi &= A \operatorname{sen}\psi \\ A_1 + A_2\cos\phi &= A\cos\psi \end{aligned} \qquad (1)$$

Quadrando e sommando

$$A_2^2 \operatorname{sen}^2\phi + A_1^2 + A_2^2\cos^2\phi + 2A_1A_2\cos\phi = A^2 \operatorname{sen}^2\psi + A^2\cos^2\psi$$

Semplificando

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\phi$$

Ritornando al problema, si sa che accendendo o spegnendo l'altoparlante in S_2 non si nota alcuna variazione nell'intensità del suono in B, in altre parole le ampiezze A_1 della prima sorgente ed A della sovrapposizione delle onde, sono uguali. Inoltre si ha che $A_1 = \sqrt{2}\,A_2$ a causa della diversa distanza. Si ottiene, quindi,

$$A_1^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\phi \quad\Rightarrow\quad 2\,A_2^2 = 2\,A_2^2 + A_2^2 + 2\sqrt{2}\,A_2^2\cos\phi$$

$$1 + 2\sqrt{2}\,\cos\phi = 0 \quad\Rightarrow\quad \cos\phi = -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad\Rightarrow\quad \phi_1 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \quad \text{e} \quad \phi_2 = 2\pi - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Ora, ricordando che $\phi_i = 2\,\pi\,\dfrac{d_i\left(\sqrt{2}-1\right)\nu}{v}$, si ricava

$$d_i = \frac{\phi_i}{2\pi}\,\frac{v}{\nu}\,\frac{1}{\sqrt{2}-1} \quad\Rightarrow\quad d_1 = 0.57\,\mathrm{m} \quad \text{e} \quad d_2 = 1.28\,\mathrm{m}$$

Materiale prodotto dal gruppo

PROGETTO OLIMPIADI
Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica
fax: 041.584.1272 e-mail: olifis@libero.it

I problemi n.1 e n.2 sono stati elaborati su proposta di due studenti già membri delle squadre italiane alle Olimpiadi Internazionali, rispettivamente Giuliano Chiriacò (Medaglia d'argento alle IPhO di Merida, Messico, 2009) e Andrea Caleo (Medaglia d'argento alle IPhO di Hanoi, Vietnam, 2008); per questa collaborazione va loro un vivo ringraziamento da parte del Gruppo Olimpiadi.