Associazione per l'Insegnamento della Fisica

Olimpiadi di Fisica 2014

Gara Nazionale
Prova Teorica
Venerdì 11 Aprile 2014
Liceo Statale "E.Medi"
Senigallia (AN)

Soluzioni

PROBLEMA n. 1 – Sbarra in caduta

Quesito n. 1.

Dalla legge della conservazione dell'energia abbiamo $\frac{1}{2} m v_0^2 = mgh$ e da qui $v_0 = \sqrt{2gh}$.

Quesito n. 2.

La forza $\vec{F}$ non ha componenti orizzontali, perché il pavimento è privo di attrito. La prima equazione cardinale della dinamica si scrive

$$\frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t} = \vec{R}_{\text{ext}}$$

dove $\vec{Q}$ è la quantità di moto del corpo e $\vec{R}_{\text{ext}}$ è la risultante delle forze esterne. In presenza di forze impulsive, tutte le altre forze (in questo caso il peso) agenti sul corpo diventano trascurabili, per cui possiamo porre, con buona approssimazione, $\vec{R}_{\text{ext}} \approx \vec{F}$. Inoltre sappiamo che $\vec{Q} = m\vec{v}$, dove $\vec{v}$ è la velocità del CdM.

Dall'equazione precedente si ricava quindi

$$\vec{v_1} = \vec{v_0} + \frac{1}{m}\vec{F}\Delta t$$

Poiché né $\vec{v}_0$ né $\vec{F}$ hanno componenti orizzontali, nemmeno $\vec{v}_1$ ne avrà: questo significa che il CdM della sbarra si muove verticalmente anche dopo l'urto. Orientando verso l'alto l'asse verticale, le componenti di $\vec{F}$ e $\vec{v}_0$ risultano rispettivamente F e $-v_0$. Indicando con v_1 la componente verticale di $\vec{v}_1$, di cui non conosciamo il segno, dall'equazione precedente ricaviamo allora

$$F\Delta t = m(v_1 + v_0) \qquad (1)$$

La seconda equazione cardinale si scrive

$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{M}_{\text{ext}}$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare della sbarra, che scegliamo di calcolare rispetto al CdM, e $\vec{M}_{\text{ext}}$ è il risultante dei momenti delle forze esterne (rispetto allo stesso punto). Per quanto detto sopra, possiamo approssimare questo momento con il momento di $\vec{F}$.

Per un corpo rigido, e in questo caso, il momento angolare baricentrale è $\vec{L} = I\vec{\omega}$, dove I è il momento d'inerzia baricentrale e $\vec{\omega}$ la velocità angolare(1). Tenendo conto del fatto che prima dell'urto si ha $L = 0$ e $\omega = 0$, e indicando con il pedice 1 i valori immediatamente dopo l'urto, si ha quindi

$$\vec{L}_1 = \vec{M}_{\text{ext}}\,\Delta t \quad \Rightarrow \quad I\omega_1 = F\,\frac{\ell}{2}\cos\alpha\,\Delta t \qquad (2)$$

Poiché l'urto è elastico, l'energia cinetica si conserva, quindi

$$\frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (3)$$

(1) Questa relazione è vera quando l'asse di rotazione è fisso oppure, come in questo caso, quando il momento angolare è allineato con un asse di simmetria (asse principale d'inerzia).

Quesito n. 3.

Dalla (1) e dalla (2) si ottiene

$$I\omega_1 = \frac{\ell}{2} \cos\alpha \; m(v_1 + v_0) \qquad (4)$$

e la (3) si può riscrivere

$$I\omega_1^2 = m(v_0^2 - v_1^2) \qquad (5)$$

Poiché la velocità del CdM dopo l'urto (v_1) è certamente diversa da quella prima dell'urto ($-v_0$), possiamo dividere la (5) per la (4) ottenendo

$$\omega_1 = 2\,(v_0 - v_1)/(\ell\,\cos\alpha) \qquad (6)$$

Risolvendo il sistema formato dalla (4) e la (6) si ottiene (ricordando l'espressione di I)

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{1 - 3\cos^2\alpha}{1 + 3\cos^2\alpha}\, v_0 \\ \omega_1 = \dfrac{12\cos\alpha}{\ell\,(1 + 3\cos^2\alpha)}\, v_0 \end{cases}$$

Quesito n. 4.

Come abbiamo visto, $\vec{v}_1$ non ha componenti orizzontali, quindi il CdM si muove ancora verticalmente, dopo l'urto, di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione $\vec{g}$.[2] Ci sono due casi qualitativamente diversi, a seconda che $\vec{v}_1$ sia rivolto verso l'alto o verso il basso.

Quesito n. 5.

Se l'inclinazione della sbarra deve essere la stessa nel momento del secondo urto, è necessario che il CdM si trovi alla stessa altezza del primo urto. Questo è impossibile se, dopo il primo urto, il CdM continua a scendere, cioè se $v_1 < 0$.

Questa condizione si verifica se $1 - 3\cos^2\alpha < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \alpha < 54.7°$.

Quesito n. 6.

Nel momento del secondo urto il CdM si trova all'altezza del primo urto. Questo è possibile, come detto prima, solo se $v_1 > 0$ e quindi per $54.7° < \alpha < 90°$.

In questo caso il tempo impiegato a ruotare di un angolo 2α, poiché il moto è un moto circolare uniforme, è $t_1 = 2\alpha/\omega_1$ e deve essere uguale al tempo impiegato dal CdM a raggiungere l'apice della traiettoria e ridiscendere $t_2 = 2v_1/g$.

Dall'uguaglianza, tenuto conto del risultato della prima domanda si ottiene

$$\frac{h}{\ell} = \frac{\alpha\,(1 + 3\cos^2\alpha)^2}{24\,\cos\alpha\,(1 - 3\cos^2\alpha)}$$

Quesito n. 7.

Dalla formula precedente si ottiene

$$h = \frac{\alpha(3\cos^2\alpha + 1)^2\,\ell}{24\cos\alpha\,(1 - 3\cos^2\alpha)} = 2.14\,\mathrm{m}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{2.09 \le h_\mathrm{f} \le 2.19 \quad [\,\mathrm{m}\,]}$

[2] Si noti che per questa conclusione è essenziale supporre, come abbiamo fatto, che l'attrito sia nullo. In presenza di un coefficiente di attrito statico diverso da zero, per quanto piccolo, ci sarà una componente orizzontale della forza impulsiva e di conseguenza una componente orizzontale di $\vec{v}_1$. Il moto che ne risulterà sarà quindi parabolico.

PROBLEMA n. 2 – Trasformazione termodinamica

Quesito n. 1.

La temperatura iniziale del gas è $20°\mathrm{C} = 293.15\,\mathrm{K}$ (accettabile anche $293\,\mathrm{K}$). Il volume iniziale è $V_0 = Sh_0 = 1000\,\mathrm{cm}^3$. La pressione iniziale è

$p_0 = p_{\mathrm{atm}} + \rho_{\mathrm{Hg}} g H_0 = 367.0\,\mathrm{kPa}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{366.2 \leq p_0 \leq 367.8 \quad [\mathrm{kPa}]}$

Quesito n. 2.

Nello stato finale, il volume è $V_\mathrm{f} = 2V_0 = 2000\,\mathrm{cm}^3$. Il pistone si sarà quindi sollevato di un tratto $\Delta h = 10\,\mathrm{cm}$. La superficie libera del mercurio sarà scesa allora di un tratto $9\Delta h$, e di conseguenza l'altezza del mercurio varia di $\Delta H = -10\Delta h$. L'altezza finale del mercurio risulta quindi $H_\mathrm{f} = H_0 + \Delta H = 1.00\,\mathrm{m}$, e la pressione finale del gas è

$p_\mathrm{f} = p_{\mathrm{atm}} + \rho_{\mathrm{Hg}} g H_\mathrm{f} = 234.2\,\mathrm{kPa}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{233.8 \leq p_\mathrm{f} \leq 234.6 \quad [\mathrm{kPa}]}$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ha

$\dfrac{p_\mathrm{f}\,V_\mathrm{f}}{T_\mathrm{f}} = \dfrac{p_0\,V_0}{T_0} \quad \Rightarrow \quad T_\mathrm{f} = \dfrac{p_\mathrm{f}\,V_\mathrm{f}}{p_0\,V_0} T_0 = 374.1\,\mathrm{K}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{373.5 \leq T_\mathrm{f} \leq 375.7 \quad [\mathrm{K}]}$

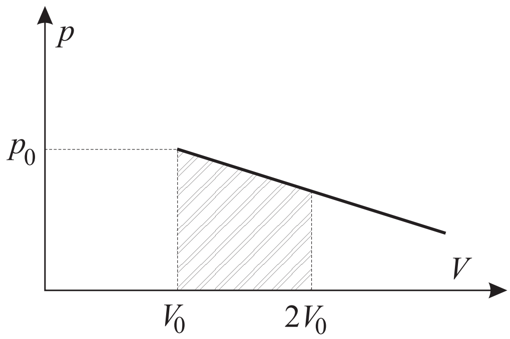
Quesito n. 3.

La variazione di volume del gas è legata al sollevamento del pistone: $\Delta V = S\Delta h$. La variazione di pressione è legata alla variazione dell'altezza del mercurio: $\Delta p = \rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, \Delta H = -10\rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, \Delta h$. Di conseguenza, il rapporto $\Delta p/\Delta V$ è costante e risulta $\Delta p/\Delta V = -k$ con

$k = 10\,\dfrac{\rho_{\mathrm{Hg}}\, g}{S} = 1.328 \times 10^8\,\mathrm{Pa\,m^{-3}}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.324 \leq k \leq 1.332 \quad [10^8\,\mathrm{Pa\,m^{-3}}]}$

La trasformazione è quindi rappresentata nel piano cartesiano da una retta passante per (V_0, p_0) e di coefficiente angolare $-k$

$$p - p_0 = -k(V - V_0) \quad \Rightarrow \quad p(V) = -kV + p_0 + kV_0$$



Quesito n. 4.

Il lavoro è dato dall'area tratteggiata nella figura precedente:

$L = \dfrac{p_0 + p_\mathrm{f}}{2}(2V_0 - V_0) = \dfrac{p_0 + p_\mathrm{f}}{2} V_0 = 300.6\,\mathrm{J}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{299.0 \leq L \leq 302.2 \quad [\mathrm{J}]}$

La variazione di energia interna risulta

$$\Delta U = n c_V\, \Delta T = \frac{5}{2}(p_\mathrm{f}(2V_0) - p_0 V_0) = \frac{5}{2}(2p_\mathrm{f} - p_0)\, V_0 = \frac{5}{2}\, p_{\mathrm{atm}}\, V_0 = 253.3\,\mathrm{J}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{252.1 \leq \Delta U \leq 254.5 \quad [\mathrm{J}]}$

Infine

$$Q = L + \Delta U = 553.9\,\mathrm{J}$$

In funzione dei dati del problema, l'espressione di Q risulta

$$Q = V_0 \left(\frac{7}{2} p_{\mathrm{atm}} + \frac{3}{4} \rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, H_0 \right)$$

Quesito n. 5.

Poiché il calore è fornito ad una potenza costante, la durata della trasformazione sarà

$$\Delta t = \frac{Q}{P} = 276.9\,\mathrm{s}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{275.7 \le \Delta t \le 278.1 \quad [\,\mathrm{s}\,]}$

Quesito n. 6.

Considerando l'equazione di stato dei gas perfetti, nel processo di trasformazione descritto nel problema la temperatura dipende dal volume, secondo la relazione

$$T(V) = \frac{pV}{nR} = \frac{T_0}{p_0 V_0}\left[-kV^2 + (p_0 + kV_0)V\right]$$

dunque è una parabola con la concavità rivolta verso il basso e la temperatura sarà massima nel punto di vertice della parabola.

Ricordando dalla geometria analitica che il vertice di una parabola di equazione $y(x) = ax^2 + bx + c$ ha coordinate : $x_\mathrm{V} = -b/(2a), y_\mathrm{V} = -\Delta/(4a)$, si ha

$$V(T_\mathrm{M}) = \frac{1}{2}\left(V_0 + \frac{p_0}{k}\right) = 1881\,\mathrm{cm}^3$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1875 \le V(T_\mathrm{M}) \le 1887 \quad [\,\mathrm{cm}^3\,]}$

$$T_\mathrm{M} = \frac{(p_0 + kV_0)^2\, T_0}{4kp_0V_0} = 375.6\,\mathrm{K}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{372.6 \le T_\mathrm{M} \le 378.6 \quad [\,\mathrm{K}\,]}$

Quesito n. 7.

In un intervallo di tempo infinitesimo dt, il gas riceve la quantità di calore $dQ = P\,dt$. Per il primo principio della termodinamica, si ha

$$\begin{aligned} dQ &= dL + dU = p\,dV + \frac{5}{2}nR\,dT = p\,dV + \frac{5}{2}\,d(pV) = \\ &= p\,dV + \frac{5}{2}\,(p\,dV + V\,dp) = \frac{7}{2}p\,dV + \frac{5}{2}V\,dp = \frac{7p - 5kV}{2}\,dV \end{aligned}$$

Poiché $dV = S\,dh$, abbiamo:

$$P\,dt = \frac{7p - 5kV}{2}\,S\,dh$$

e quindi la velocità con cui sale il pistone è

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{2P}{(7p - 5kV)\,S} = \frac{2P}{(7p_0 + 7kV_0 - 12kV)\,S}$$

Nello stato finale la velocità del pistone sarà dunque

$$v_\mathrm{f} = \frac{2P}{(7p_0 - 17kV_0)\,S} = 1.29\,\mathrm{mm\,s^{-1}}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.26 \le v_\mathrm{f} \le 1.32 \quad [\,\mathrm{mm\,s^{-1}}\,]}$

Osserviamo incidentalmente che l'espressione della velocità diverge per $V \to (7/12)(V_0 + p_0/k) = 2193\,\mathrm{cm}^3$, quindi questa trasformazione non potrebbe continuare con queste modalità fino a questo valore.

PROBLEMA n. 3 – Pendolo elettrostatico

Quesito n. 1.

Quando P è lontana da A, questa si è caricata completamente e si è portata al potenziale V rispetto alla terra. Poiché può essere trattata come una sfera isolata, la relazione tra carica e potenziale è

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_\mathrm{A}}{r} \quad \text{da cui} \quad Q_\mathrm{A} = 4\pi\varepsilon_0 rV$$

Quando P è lontana da B, questa si è completamente scaricata a terra, per cui $Q_\mathrm{B} = 0$.

Il valore numerico di Q_A risulta $4.451\,\mathrm{nC}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{4.433 \le Q_\mathrm{A} \le 4.469 \quad [\,\mathrm{nC}\,]}$

Quesito n. 2.

Quando P si muove da A a B ("all'andata"), la sua carica è q_1. Quando urta B, questa si è scaricata completamente, e quindi la sua carica è zero. Durante il contatto fra le due sfere identiche la carica si ripartisce fra esse in misura eguale, per motivi di simmetria, e quindi la carica trasportata da P al ritorno sarà $q_2 = q_1/2$. Quando urta A (che nel frattempo si è ricaricata e dunque ha carica Q_A), la carica complessiva $Q_A + q_1/2$ si ripartisce in modo uguale tra A e P, e dunque P ne prende la metà. Se siamo all'equilibrio, questa carica sarà uguale a q_1:

$$\frac{1}{2}\left(Q_\mathrm{A} + \frac{1}{2}q_1\right) = q_1 \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{2}{3}Q_A \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{1}{3}Q_A$$

I valori numerici sono:

$q_1 = 2.967\,\mathrm{nC}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{2.956 \le q_1 \le 2.978 \quad [\,\mathrm{nC}\,]}$

$q_2 = 1.484\,\mathrm{nC}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.478 \le q_2 \le 1.490 \quad [\,\mathrm{nC}\,]}$

Quesito n. 3.

In definitiva, ad ogni oscillazione viene trasferita la quantità di carica $Q_\mathrm{A}/3$ da A a B. Poiché il periodo T delle oscillazioni è $1/95$ di minuto, l'intensità di corrente media risulta:

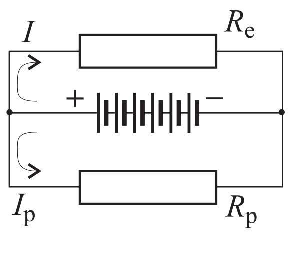
$I = Q_\mathrm{A}/3T = 2.349\,\mathrm{nA}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{2.335 \le I \le 2.363 \quad [\,\mathrm{nA}\,]}$

La resistenza equivalente R_e sarà:

$R_\mathrm{e} = V/I = 851\,\mathrm{G\Omega}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{847 \le R_\mathrm{e} \le 855 \quad [\,\mathrm{G\Omega}\,]}$

Quesito n. 4.

In figura è rappresentato lo schema del circuito equivalente.



La corrente parassita risulta:

$I_\mathrm{p} = V/R_\mathrm{p} = 200.0\,\mathrm{nA}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{199.2 \le I_\mathrm{p} \le 200.8 \quad [\,\mathrm{nA}\,]}$

Questo valore è 85 volte più grande di I. È chiaro quindi che il processo dominante che contribuisce a scaricare il generatore è la corrente parassita, e non quella che passa attraverso il pendolo.

Quesito n. 5.

La corrente totale che attraversa il generatore è $I_t = I + I_p$
La carica totale che attraversa il generatore nel tempo Δt sarà allora

$$Q_t = I_t \Delta t = V\,\Delta t \left(\frac{4\pi\,\varepsilon_0\,r}{3T} + \frac{1}{R_p}\right) = 6.39\,\mathrm{C}$$

RIS ⇒ $\boxed{6.35 \le Q_t \le 6.43 \quad [\,\mathrm{C}\,]}$

Se per ogni molecola di elettrolita sono in gioco 2 cariche elementari, detta n la quantità di elettrolita espressa in moli, il numero di molecole è $N = N_A\,n$, essendo N_A la costante di Avogadro, e la carica totale si può scrivere come $Q_t = 2e\,N_A\,n$. Ne segue che

$$n = Q_t/2eN_A = 33.1\,\mu\mathrm{mol}$$

RIS ⇒ $\boxed{32.9 \le n \le 33.4 \quad [\,\mu\mathrm{mol}\,]}$

Quesito n. 6.

La potenza fornita dal generatore è $P_g = I_t V$. La quantità di energia erogata ad ogni oscillazione sarà quindi

$$E = P_g T = I_t V\,T = 256\,\mu\mathrm{J}$$

RIS ⇒ $\boxed{253 \le E \le 259 \quad [\,\mu\mathrm{J}\,]}$

Nota storica:

All'inizio del secolo XIX, subito dopo l'invenzione della pila da parte di Volta, fiorirono numerosi dispositivi più o meno ingegnosi che sfruttavano il nuovo potente "generatore perpetuo di elettricità", come lo chiamò Volta stesso. Fra i più curiosi, c'è un interessante "orologio elettrostatico", ancora conservato nel museo di Storia dell'Arte di Modena, ideato da un geniale costruttore di pile veneto contemporaneo di Volta, l'abate Zamboni.

Le sfere metalliche sulle due aste sono collegate ad un vero e proprio generatore elettrostatico costruito da Zamboni mettendo in serie dentro un tubo di vetro circa un migliaio di pile a secco preparate con una "ricetta" particolare sviluppata da Zamboni stesso. Il generatore elettrostatico poteva raggiungere 2000 V*; non era di grande utilità perché poteva produrre correnti molto basse, però poteva essere usato per effetti elettrostatici.*

Secondo i documenti storici, il pendolo funzionò senza fermarsi né aver bisogno di essere ricaricato per più di 100 anni! Mentre però all'inizio il pendolo faceva 95 oscillazioni al minuto, alla fine ne faceva solo 45.