



Associazione
per l'Insegnamento
della Fisica



Olimpiadi di Fisica



35^a Edizione

Gara Nazionale, prova teorica - Senigallia (AN) venerdì 30 aprile 2021

Soluzione

PROBLEMA n. 1 – Scattering elastico tra due sfere

Quesito n. 1.

Poiché le sfere non sono vincolate non ci sono forze esterne che agiscono sul sistema. Di conseguenza, si conserva la quantità di moto totale. Poiché le forze in gioco sono interne e conservative e il sistema è isolato, si conserva anche l'energia cinetica.

Invece l'energia cinetica e la quantità di moto della sola sfera A non si conservano perché durante l'urto ad essa è applicata una forza da parte della sfera B.

Quesito n. 2.

Si orienta il sistema di riferimento nel verso della velocità \vec{v}_A . Le leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica si scrivono rispettivamente:

$$\begin{cases} m_A v_A = m_A v'_A + m_B v'_B \\ \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B v'^2_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_A (v_A - v'_A) = m_B v'_B \\ m_A (v_A^2 - v'^2_A) = m_B v'^2_B \end{cases}$$

Dividendo la seconda equazione per la prima e sostituendo in quella di primo grado si ricava v'_A :

$$v'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A.$$

Nel caso $\mu < 1$ si ha che v'_A è negativa, e questo significa che A torna indietro dopo l'urto, indipendentemente dal valore di v_A e anche indipendentemente dal rapporto delle masse. Quindi, per qualunque $\mu < 1$, è sempre $\alpha = 180^\circ$.

Invece per $\mu > 1$ si ha che v'_A è positivo. Ciò significa che A prosegue nel verso positivo del riferimento, quindi $\alpha = 0^\circ$.

Nel caso $\mu = 1$ risulta $v'_A = 0$ e la sfera resta ferma dopo l'urto.

L'urto centrale è dunque un urto a deviazione massima per $m_A < m_B$, e a deviazione minima per $m_A > m_B$.

Quesito n. 3.

Nel caso $\mu < 1$, si è visto che per $b = 0$ la deviazione è sempre 180° , che è il massimo valore possibile per α ; in altre parole, al variare di b , il massimo non può essere maggiore di questo. Quindi α_{\max} è ancora 180° per qualunque $\mu < 1$.

Quesito n. 4.

Poiché B è inizialmente ferma, e riceve un impulso nella direzione individuata dall'angolo β , sarà evidentemente questa la direzione in cui si muoverà. Le leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica risultano allora

$$\begin{cases} m_A v_A = m_A v'_A \cos \alpha + m_B v'_B \cos \beta \\ 0 = m_A v'_A \sin \alpha - m_B v'_B \sin \beta \\ \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B v'^2_B. \end{cases}$$

Qui v_A, v'_A e v'_B indicano i moduli dei rispettivi vettori e quindi, a differenza del punto 2, sono quantità sempre positive.

Quesito n. 5.

Se le masse sono uguali, quindi $\mu = 1$, utilizzando la relazione data nel testo, risulta

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2s\sqrt{1-s^2}}{2s^2 + \mu - 1} = \frac{\sqrt{1-s^2}}{s} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \operatorname{ctg} \beta$$

e dunque α e β sono complementari. Le traiettorie delle due sfere dopo l'urto sono tra loro ortogonali.

Soluzione alternativa

Nel caso di masse uguali la conservazione della quantità di moto e quella dell'energia si riducono a

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v}'_B \\ v_A^2 = v'^2_A + v'^2_B. \end{cases}$$

Quindi il vettore \vec{v}_A si ottiene come somma dei \vec{v}'_A e \vec{v}'_B e il suo modulo quadro si ottiene come somma dei due rispettivi moduli quadri; perciò, per il teorema di Pitagora, l'angolo tra \vec{v}'_A e \vec{v}'_B deve essere retto.

Quesito n. 6.

Poiché si considera il caso $\mu > 1$ la funzione al secondo membro della (1) data nel testo sarà positiva per qualunque valore del parametro d'impatto e di conseguenza l'angolo di deviazione α non sarà mai maggiore di 90° ; poiché tra 0 e 90° $\operatorname{tg} \alpha$ è una funzione crescente, per cercare il massimo di α si può dunque cercare il massimo di $\operatorname{tg} \alpha$. Annullando la derivata rispetto a s si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{d}{ds} \frac{2s\sqrt{1-s^2}}{2s^2 + \mu - 1} = 0 \\ \left[\frac{d(2s\sqrt{1-s^2})}{ds} (2s^2 + \mu - 1) - 2s\sqrt{1-s^2} \frac{d(2s^2 + \mu - 1)}{ds} \right] \frac{1}{(2s^2 + \mu - 1)^2} &= 0 \\ \left(2\sqrt{1-s^2} - \frac{2s^2}{\sqrt{1-s^2}} \right) (2s^2 + \mu - 1) - 2s\sqrt{1-s^2} (4s) &= 0 \\ [2(1-s^2) - 2s^2] (2s^2 + \mu - 1) - 8s^2 (1-s^2) &= 0 \\ 2(\mu - 1) - 4\mu s^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad s &= \sqrt{\frac{\mu - 1}{2\mu}} = \bar{s}. \end{aligned}$$

Per controllare che questo sia il massimo si calcolano i valori di $\operatorname{tg} \alpha$ per $s = 0, s = 1$ e $s = \bar{s}$. I primi due valori danno 0, il terzo dà

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{2\sqrt{2\mu/(\mu-1)-1}}{2+2\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} \quad \text{che è definita essendo } \mu > 1. \quad (2)$$

Il valore del massimo di $\alpha(s)$ è dunque

$$\alpha_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}}.$$

A differenza di quanto accade per $\mu < 1$, ovvero per $m_A < m_B$, la deviazione massima dipende dal rapporto tra le masse (ma, come detto, non da v_A).

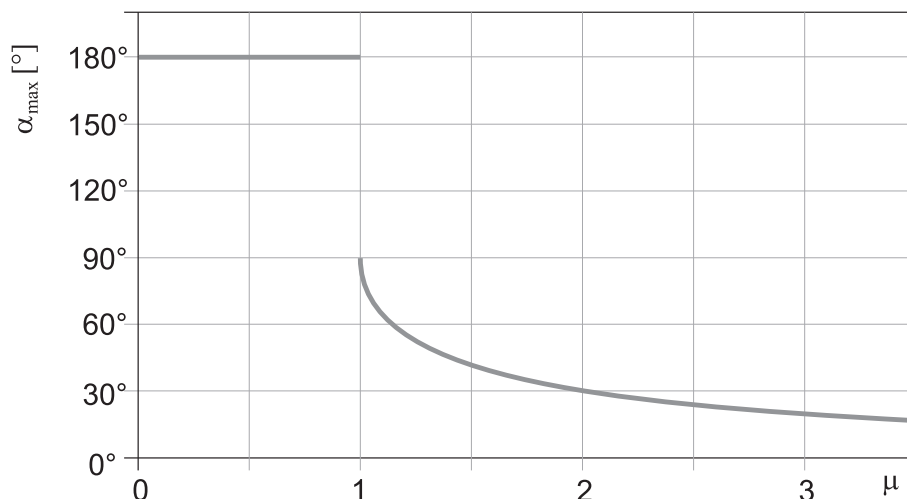
Quesito n. 7.

Il grafico di α_{\max} in funzione di μ è quindi quello a fianco.

Il caso $\mu = 1$ merita una discussione. In questo caso la funzione $\tan \alpha_{\max}$ diverge per $s \rightarrow 0$. Per s piccoli quindi, $\alpha_{\max} \rightarrow \pi/2$ e si potrebbe definire, $\alpha_{\max}(0) = \pi/2$, che coinciderebbe col valore massimo.

Tuttavia per $s = 0$ e $\mu = 1$ si ha un urto centrale in cui la sfera A rimane ferma e l'angolo α_{\max} non è quindi definito. Per questa ragione, per $\mu = 1$ non esiste un valore massimo della funzione $\alpha_{\max}(s)$ ma è possibile ottenere valori arbitrariamente vicini a $\pi/2$ per valori sufficientemente piccoli del parametro d'urto.

La discontinuità riflette il fatto che, se $\mu < 1$ e $b = 0$ la sfera A dopo l'urto si muove nella stessa direzione di provenienza, ma con verso opposto e quindi l'angolo di deflessione massimo è 180° . Per $\mu = 1$ la sfera A si ferma e quindi l'angolo di deflessione non è definito, mentre per $\mu > 1$ l'angolo di deflessione massimo è certamente minore di $\pi/2$.

**NOTA**

Tra il 1908 e il 1913 Geiger e Marsden, sotto la direzione di Rutherford, fecero una serie di esperimenti che si rivelarono cruciali per capire la struttura atomica. A quell'epoca il modello di atomo più accreditato presso la comunità scientifica era quello cosiddetto "a panettone" proposto da J.J. Thomson, secondo cui l'atomo era una sfera di carica positiva al cui interno erano distribuiti gli elettroni, come l'uvetta in un panettone.

Nei loro esperimenti Geiger e Marsden bombardarono un sottilissimo foglio d'oro con delle particelle alfa; si aspettavano che questa potesse attraversare più o meno indisturbata la nube di carica positiva, e che al massimo potesse subire qualche piccola deviazione per effetto dell'urto con qualche elettrone. Con enorme sorpresa scoprirono che una percentuale, sia pure piccolissima, di queste particelle subiva invece deviazioni anche molto grandi, prossime a 180° .

Poiché le particelle alfa hanno una massa circa 7300 volte maggiore di quella degli elettroni, si capisce bene la sorpresa di Rutherford e dei suoi collaboratori se si pensa che per $\mu = 7300$ la formula (2) prevede una deviazione massima, in un singolo urto, di 0.008° ! Modellizzando l'urto come interazione elettrostatica la situazione migliora un po' ma non di molto: la deviazione massima prevista è all'incirca il doppio di questa.

Questo il commento di Rutherford:

It was quite the most incredible event that has ever happened to me in my life. It was almost as incredible as if you fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you. On consideration, I realized that this scattering backward must be the result of a single collision, and when I made calculations I saw that it was impossible to get anything of that order of magnitude unless you took a system in which the greater part of the mass of the atom was concentrated in a minute nucleus.

It was then that I had the idea of an atom with a minute massive centre, carrying a charge.

APPENDICE

Per completezza si dimostra qui la relazione (1) data nel testo.

Essendo interessati ad A e non a B, si elimina v'_B ricavandolo dalla seconda equazione e sostituendolo

nelle altre due

$$\begin{cases} v_A = v'_A \cos \alpha + \frac{v'_A \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta} \\ v'_B = \frac{m_A v'_A \sin \alpha}{m_B \sin \beta} = \mu v'_A \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \\ v_A^2 = v'^2_A + \mu \frac{v'^2_A \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_A = v'_A \left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta} \right) \\ v'^2_A = v'^2_A \left(1 + \mu \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} \right) \end{cases}$$

Quadrando la prima equazione e confrontandola con la seconda si trova la seguente relazione notevole in cui non compaiono né v_A né v'_A .

$$\left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta} \right)^2 = 1 + \mu \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}$$

Questa espressione è degna di nota, perché mostra che, contrariamente a quanto si potrebbe supporre (ma analogamente a quanto succede per $m_A < m_B$), la deviazione subita da A dipende dal parametro d'impatto, ma *non* dipende dalla velocità iniziale di A

$$\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \sin^2 \alpha \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} = 1 + \mu \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}$$

Sostituendo $1 - \cos^2 \alpha$ con $\sin^2 \alpha$ e dividendo tutto per $\sin \alpha$ resta

$$2 \cos \alpha \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \sin \alpha \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \sin \alpha + \mu \frac{\sin \alpha}{\sin^2 \beta}$$

$$2 \cos \alpha \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \sin \alpha \left(1 + \frac{\mu}{\sin^2 \beta} - \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} \right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cos \beta / \sin \beta}{2 + (\mu - 1) / \sin^2 \beta} =$$

$$= \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{2 \sin^2 \beta + (\mu - 1)} = \frac{2s\sqrt{1-s^2}}{2s^2 + \mu - 1} \quad (\text{c.v.d.}) \quad (1)$$

PROBLEMA n. 2 – Modelli di atmosfera

Quesito n. 1.

Quando la quota varia di dz la variazione dp della pressione atmosferica è

$$dp = -\rho g dz \quad (\text{equazione di equilibrio idrostatico}). \quad (1)$$

dove ρ è la densità dell'aria che, per l'equazione dei gas perfetti, e tenuto conto che la massa del gas considerato per n moli è $m = n\mu$, risulta

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{n\mu}{nRT/p} = \frac{p\mu}{RT}. \quad \text{Sostituendo nella (1) si ha}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz.$$

Per semplificare le notazioni, come raccomandato nel testo, si introduce la costante $\lambda = RT_0/(\mu g)$ (detta "altezza caratteristica") e si scrive

$$\frac{dp}{p} = -\frac{T_0}{T} \frac{dz}{\lambda}. \quad (2)$$

Se la temperatura dell'aria è uniforme e uguale a T_0 ,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dz}{\lambda} \quad \text{da cui, integrando, si ha} \quad p(z) = p_0 e^{-z/\lambda}. \quad (3)$$

Quesito n. 2.

Poiché la cella può considerarsi termicamente isolata dall'ambiente, in ogni movimento verticale essa subisce una trasformazione adiabatica, adattando la pressione a quella della massa d'aria.

Se si innescasse uno spostamento della cella verso il basso, questa sarebbe compressa e la sua temperatura aumenterebbe risultando così meno densa dell'ambiente che è a temperatura uniforme. Di conseguenza la cella tenderebbe a tornare nella posizione iniziale. Analogamente, in senso opposto, per un moto verso l'alto.

Si tratta quindi di un equilibrio stabile.

Quesito n. 3.

Per quanto sopra, si avrà equilibrio indifferente quando la temperatura della massa d'aria in funzione della quota, $T(z)$, coincide con quella che la cella si troverebbe ad avere spostandosi in verticale, soggetta ad una trasformazione adiabatica.

L'equazione dell'adiabatica è $pV^\gamma = \text{costante}$ da cui, con facili sostituzioni ($V \propto T/p$),

$$p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{costante}, \quad \text{con } \gamma = 7/5 \quad \text{per un gas con una molecola biatomica.}$$

Dunque

$$p^{-2/5} T^{7/5} = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad T^7 = cp^2 \quad \text{dove } c \text{ è una costante.}$$

Differenziando entrambi i membri e moltiplicando e dividendo il primo membro per T e il secondo per p si ottiene

$$7T^6 dT = 2cp dp \quad \Rightarrow \quad 7 \frac{T^7}{T} dT = 2c \frac{p^2}{p} dp.$$

A questo punto si può sostituire nel primo membro $T^7 = cp^2$ e, utilizzando la (2), si trova

$$7 \frac{dT}{T} = 2 \frac{dp}{p} = -2 \frac{T_0}{T} \frac{dz}{\lambda}.$$

Integrando fra 0 e z si ha

$$T_{\text{mac}}(z) = T_0 \left(1 - \frac{2}{7} \frac{z}{\lambda} \right) \quad (4)$$

che rappresenta l'andamento della temperatura nella cosiddetta **atmosfera adiabatica**.

Quesito n. 4.

La molecola biatomica ha un'energia cinetica media $K = 5kT_0/2$ (con k costante di Boltzmann) e un'energia potenziale che, detta m_0 la massa della molecola ($m_0 = \mu/N_A$ dove N_A è la costante di Avogadro), alla quota z si scrive

$$U(z) = m_0 gz = \frac{\mu}{N_A} gz, \quad \text{cosicché risulta nulla al livello del mare.}$$

Poiché si è supposto che l'energia totale E delle molecole sia uniforme al variare della quota, si può scrivere

$$E(z) = E(0) \quad \Rightarrow \quad K(z) + U(z) = K(0) \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2}kT(z) + \frac{\mu}{N_A}gz = \frac{5}{2}kT_0$$

da cui, ricordando che $kN_A = R$, si ricava

$$T_{\text{mic}}(z) = T_0 - \frac{2\mu g}{5kN_A} z = T_0 \left(1 - \frac{2\mu g}{5RT_0} z \right) = T_0 \left(1 - \frac{2}{5} \frac{z}{\lambda} \right). \quad (5)$$

Quesito n. 5.

Secondo il modello macroscopico, sostituendo la (4) nella (2) si ha:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{dz}{\lambda - 2z/7}.$$

Integrando entrambi i membri tra 0 e z (v. integrale dato nel testo) risulta

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = \frac{7}{2} \ln \frac{\lambda - 2z/7}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad p_{\text{mac}}(z) = p_0 \left(1 - \frac{2}{7} \frac{z}{\lambda} \right)^{7/2}. \quad (6)$$

Per il modello microscopico il calcolo è identico, salvo sostituire il coefficiente $7/2$ con $5/2$, per cui si ha

$$p_{\text{mic}}(z) = p_0 \left(1 - \frac{2}{5} \frac{z}{\lambda} \right)^{5/2}. \quad (7)$$

Quesito n. 6.

Il confronto con il caso elementare discusso al punto 1 si può fare considerando che se $x \ll 1$ l'esponenziale e^x si può approssimare con $1 + x$, mentre l'espressione $(1 + x)^\alpha$ si può approssimare con $1 + \alpha x$.

Dunque, se $z \ll \lambda$ (e, a maggior ragione $(2/7)z < (2/5)z < z \ll \lambda$), si possono usare le approssimazioni citate, per l'atmosfera isoterma si ottiene

$$p(z) = p_0 e^{-z/\lambda} \approx p_0 \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)$$

mentre per i due modelli di atmosfera adiabatica si ha rispettivamente

$$p_{\text{mac}}(z) = p_0 \left(1 - \frac{2}{7} \frac{z}{\lambda}\right)^{7/2} \Rightarrow p_{\text{mac}}(z) \approx p_0 \left(1 - \frac{7}{2} \frac{2}{7} \frac{z}{\lambda}\right) = p_0 \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)$$

$$p_{\text{mic}}(z) = p_0 \left(1 - \frac{2}{5} \frac{z}{\lambda}\right)^{5/2} \Rightarrow p_{\text{mic}}(z) \approx p_0 \left(1 - \frac{5}{2} \frac{2}{5} \frac{z}{\lambda}\right) = p_0 \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Dunque i tre modelli coincidono finché $z \ll \lambda$.

Quesito n. 7.

Usando i valori numerici assegnati, la costante $\lambda = 8.88$ km e quindi, con $z = 1$ km, si ha

$$\frac{z}{\lambda} = 0.1126, \quad \frac{2}{7} \frac{z}{\lambda} = 0.0322, \quad \frac{2}{5} \frac{z}{\lambda} = 0.0450.$$

I valori ottenuti sono raccolti insieme nella tabella seguente.

Modello	Pressione [kPa]	Temperatura [K]
Atmosfera isoterma	89.35	293.2
Atmosfera adiabatica	89.18	283.7
Microscopico	89.12	279.9

Le differenze sono minime se si considera che il modello di atmosfera considerato è molto semplificato. La pressione differisce nei tre modelli nell'ordine dello 0.1%, mentre la temperatura, che ovviamente è diversa nei casi di atmosfera isoterma e adiabatica, differisce dell'1.5% tra il modello macroscopico e quello microscopico.

Questo risultato è coerente con il fatto che la quota di 1000 m è ancora decisamente minore dell'altezza caratteristica λ delle funzioni esaminate.

Nota: In realtà, a causa dei movimenti di rimescolamento nell'atmosfera e della presenza di altri componenti, la temperatura scende meno rapidamente di quanto qui calcolato; nella troposfera essa scende in media di 6.5 K km^{-1} .

PROBLEMA n. 3 – Un sistema stellare binario
Quesito n. 1.

La coppia di spettri la cui somma dà lo spettro osservato è quella mostrata nella figura 2.2.

Per ricavarlo è sufficiente controllare la somma dei valori per almeno una lunghezza d'onda con quelli del grafico risultante. Per esempio, in corrispondenza della lunghezza d'onda $0.5 \mu\text{m}$, nel secondo grafico l'irradianza spettrale prodotta dalla stella A è circa $2.9 \mu\text{W m}^{-3}$, mentre quella dovuta alla stella B è $4.2 \mu\text{W m}^{-3}$. La somma di questi due valori è $7.1 \mu\text{W m}^{-3}$, che corrisponde al valore effettivamente osservato.

Nel primo grafico, invece, in corrispondenza della stessa lunghezza d'onda si ha rispettivamente: per la stella A $3.3 \mu\text{W m}^{-3}$, per la B $6.7 \mu\text{W m}^{-3}$; la somma di questi due valori dà $10.0 \mu\text{W m}^{-3}$, incompatibile con il valore nello spettro osservato.

La somma dei due spettri riportati nella figura 2.1 è mostrata nella figura S-1.

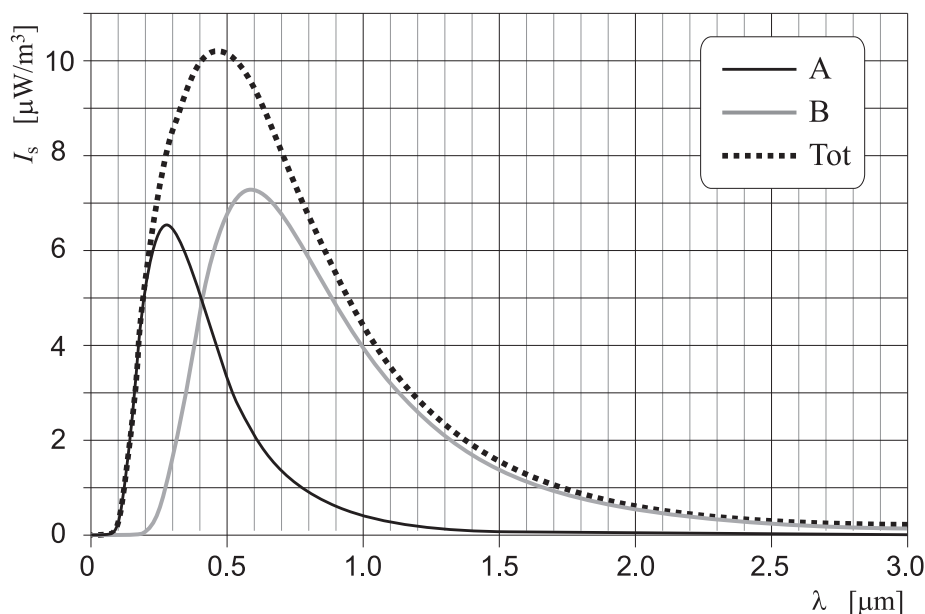


Figura S-1

Quesito n. 2.

Nello spettro di corpo nero, la temperatura assoluta della sorgente, T , è legata alla posizione del massimo della curva dalla legge dello spostamento di Wien

$$\lambda_p T = b$$

dove λ_p è la lunghezza d'onda in corrispondenza del massimo (picco) della curva, e b è la costante dello spostamento di Wien, che si può leggere nella tabella dei dati allegata. Dal grafico di figura 2.2 si ricava che per la stella A la lunghezza d'onda a cui si ha il massimo è circa $\lambda_{p,A} = 0.28 \mu\text{m}$. Per la legge di Wien, la temperatura corrispondente è

$$T_A = \frac{b}{\lambda_{p,A}} = 1.03 \times 10^4 \text{ K}.$$

Per la stella B si ha

$$\lambda_{p,B} = 0.69 \mu\text{m} \quad \Rightarrow \quad T_B = \frac{b}{\lambda_{p,B}} = 4.2 \times 10^3 \text{ K}.$$

Quesito n. 3.

Nello spettro del corpo nero, l'area sotto la curva è uguale alla potenza totale P irradiata dalla sorgente e integrata su tutte le lunghezze d'onda (luminosità). Nei grafici mostrati nella figura 2.2, l'area sotto ciascuna curva rappresenta l'irradianza, I , ovvero il rapporto $P/(4\pi D^2)$, dove D è la distanza della stella da noi. Poiché questa distanza è la stessa per le due stelle, le due aree sono scalate dello stesso fattore, e dunque il rapporto tra le aree esprime il rapporto tra le luminosità delle due stelle. Senza fare nessun calcolo si vede chiaramente che l'area sotto lo spettro della stella B è molto maggiore dell'altra, e dunque è questa la stella più luminosa.

Quesito n. 4.

In figura S-2 a destra una rappresentazione dell'effetto noto come “parallasse stellare”: durante il movimento della Terra intorno al Sole, in sei mesi essa passa dalla posizione P alla posizione Q. Di conseguenza la posizione apparente di una stella relativamente vicina, rispetto a quelle più lontane, cambia e la linea di vista ruota di un angolo pari ad α .

Per definizione l'angolo di parallasse stellare γ corrisponde alla metà di α , ovvero

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} = 0.00102''.$$

La distanza D del sistema stellare dalla Terra è legata al raggio medio, R , dell'orbita terrestre intorno al Sole (e pari, per definizione, a 1 UA) e all'angolo di parallasse γ dalla relazione

$$D = \frac{R}{\tan \gamma} = 2.02 \times 10^8 \text{ UA} = 3.03 \times 10^{16} \text{ km}.$$

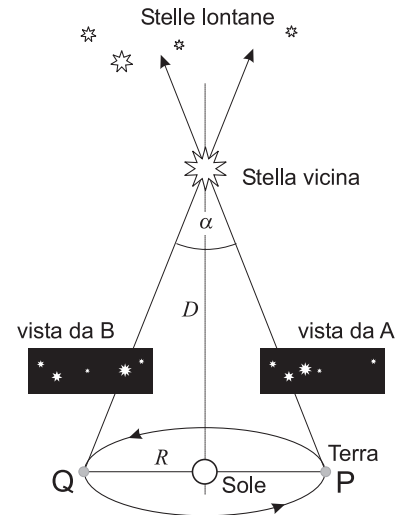


Figura S-2

Quesito n. 5.

Si è detto che la luminosità L di una stella è la potenza irradiata, integrata su tutte le lunghezze d'onda. Sulla Terra, a distanza D dalla stella, essa produce un'irradianza (totale) $I = L/(4\pi D^2)$ che è data dall'area sotto la curva dello spettro stellare. Si deve quindi stimare tale area utilizzando il grafico dello spettro della stella A.

Per questo si può utilizzare la griglia sulla quale è rappresentato il grafico e stimare l'area in rettangolini; per migliorare l'accuratezza della misura conviene dividere orizzontalmente i rettangolini della griglia, inserendo i valori seminteri nella scala delle ordinate. Ogni mezzo rettangolino, che rappresenta l'unità di area, ha quindi una base di $0.04 \mu\text{m}$ e un'altezza di $0.5 \mu\text{W m}^{-3}$; dunque l'unità di area vale $A_r = 2 \times 10^{-14} \text{ W m}^{-2}$.

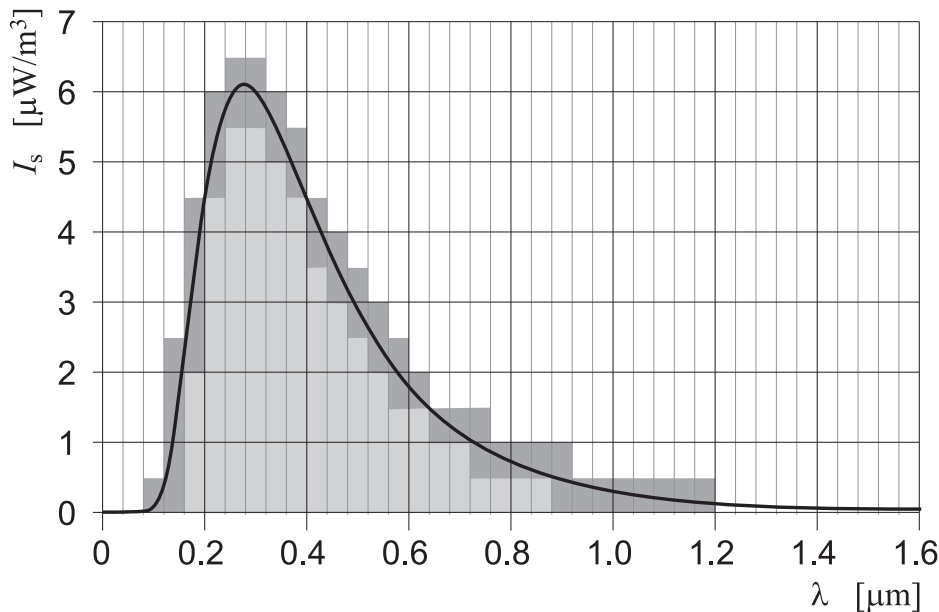


Figura S-3

La procedura consiste nel contare il numero n_{int} di unità che sono interamente sotto la curva (in grigio chiaro) e il numero n_{par} di quelle che risultano solo in parte sotto la curva, essendo attraversate da questa. Certamente l'area sotto curva, N in unità di aree elementari, è compresa nell'intervallo

$$n_{\text{int}} \leq N \leq n_{\text{int}} + n_{\text{par}} \quad \Rightarrow \quad N = \left(n_{\text{int}} + \frac{1}{2} n_{\text{par}} \right) \mp \frac{1}{2} n_{\text{par}}.$$

Così facendo la stima dell'errore è certamente pessimistica perché è poco probabile che le aree di bordo siano tutte prevalentemente all'interno o all'esterno. È quindi ragionevole assumere come incertezza di

misura almeno la metà di quella data sopra. Inoltre, per non sovrastimare la coda della distribuzione spettrale, si limita il conteggio fino a $\lambda_{\max} = 1.2 \mu\text{m}$.

Contando ora i semi-rettangolini se ne trovano 90 contenuti completamente sotto la curva (nella figura S-3 sono quelli in grigio chiaro), e 49 contenuti parzialmente (in grigio scuro).

Una buona stima del numero di rettangolini sarà quindi

$$N = \left(90 + \frac{49}{2}\right) \mp \frac{49}{4} = 115 \pm 12 \quad \text{con un'incertezza percentuale } \varepsilon = \frac{12}{115} \approx 10\%$$

minore del 15 % richiesto.

L'irradianza (totale) prodotta dalla stella A, data dall'area sotto la curva, sarà quindi

$$I_A = NA_r = 2.3 \times 10^{-12} \text{ W m}^{-2} \quad \text{e la luminosità risulta}$$

$$L_A = 4\pi D^2 I_A = 2.6 \times 10^{28} \text{ W} \quad \text{pari a circa 70 volte quella solare.}$$

Quesito n. 6.

Il raggio R_A può essere ricavato dalla legge di Stefan-Boltzmann. Tenendo conto che una stella ha forma approssimativamente sferica, si ha

$$L_A = \sigma (4\pi R_A^2) T_A^4.$$

Usando anche la precedente relazione che lega l'irradianza I alla luminosità L , si ha:

$$R_A = \frac{D}{T_A^2} \sqrt{\frac{I_A}{\sigma}} = 1.8 \times 10^9 \text{ m}.$$

Il raggio trovato è circa due volte e mezzo quello solare.

Quesito n. 7.

La potenza (luminosità) di un corpo nero è data dalla legge di Stefan-Boltzmann,

$$L = \sigma S T^4,$$

dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann, T la temperatura assoluta della stella e S l'area della sua superficie. Poiché la stella più luminosa è B, che è la più fredda, la sua maggiore luminosità può essere dovuta solamente al fatto che la sua area (e quindi il suo raggio) è molto maggiore di quello di A.

Alternativamente si potrebbe calcolare il raggio della stella B con lo stesso metodo usato nella domanda precedente per la stella A. La risposta sarebbe ugualmente valida.

PROBLEMA n. 4 – Due fili paralleli carichi

Quesito n. 1.

Per simmetria rispetto al piano passante per i due fili basta studiare una semicirconferenza (v. figura S-1, dove si è fissato $\lambda > 0$); un punto P su questa è individuato ad esempio dal valore dell'angolo $\alpha \in [0, \pi/2]$.

Il campo di un filo è radiale e vale in modulo $E = 2k_{\text{es}}\lambda/r$ dove $k_{\text{es}} = 1/(4\pi\epsilon_0)$ e r è la distanza del punto considerato dal filo. Il triangolo ABP è rettangolo in P perché inscritto in una semicirconferenza, quindi i campi dei due fili, nel punto P, sono ortogonali e di modulo rispettivamente

$$E_+ = \frac{2k_{\text{es}}\lambda}{2a \cos \alpha} = \frac{k_{\text{es}}\lambda}{a \cos \alpha} \quad E_- = \frac{k_{\text{es}}\lambda}{a \sin \alpha}.$$

Il modulo del campo complessivo \vec{E} vale quindi

$$E = \sqrt{E_+^2 + E_-^2} = \frac{k_{\text{es}}\lambda}{a} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{k_{\text{es}}\lambda}{a} \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{2k_{\text{es}}\lambda}{a \sin 2\alpha}.$$

Il minimo di E si avrà nei punti in cui $\sin 2\alpha$ è massimo, ovvero per

$$\sin 2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pi/4.$$

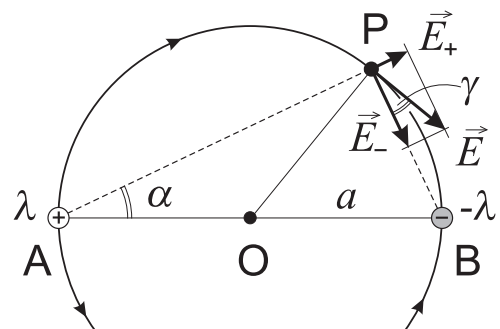


Figura S-1

Quesito n. 2.

La tangente dell'angolo γ che \vec{E} forma con \vec{E}_- è

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{E_+}{E_-} = \operatorname{tg} \alpha \quad \Rightarrow \quad \gamma = \alpha \quad \text{essendo entrambi minori di } \pi/2.$$

Il triangolo OPB è isoscele sulla base PB, quindi l'angolo \widehat{OPB} è congruente all'angolo \widehat{OBP} e pari a $\pi/2 - \alpha$. Di conseguenza l'angolo tra il raggio OP e il campo \vec{E} è retto e quindi il campo è tangente alla circonferenza.

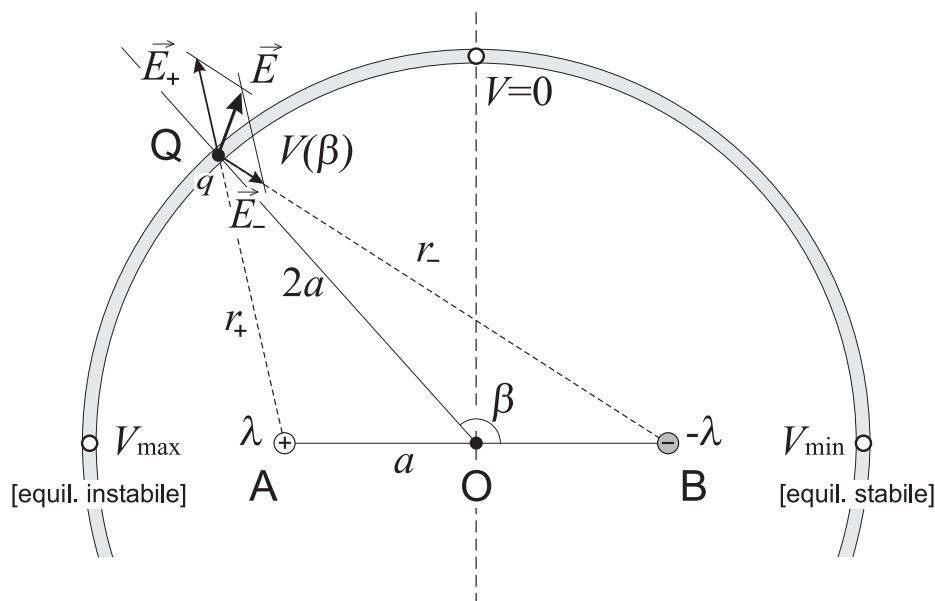
Quesito n. 3.

Figura S-2

Indicando adesso con β la posizione del punto Q dove si trova la carica q sulla guida circolare di raggio $2a$ e centro O (si veda la figura S-2), occorre cercare in quali punti il campo è perpendicolare alla guida; questo è certamente vero per $\beta = 0$ e $\beta = \pi$. Il primo è un punto di equilibrio stabile; infatti lo è considerando solo il filo carico negativamente (se la carica viene leggermente spostata la distanza cresce e la forza attrattiva la riporta nel punto più vicino) mentre la forza repulsiva del filo carico positivamente è certamente minore; al contrario per $\beta = \pi$.

In ogni altro punto il campo ha componente tangente alla circonferenza non nulla come si evince dalla figura S-2 dal fatto, verificabile geometricamente, che i campi dei due fili hanno componente tangente non nulla e concorde.

Infatti il campo \vec{E}_+ prodotto dal filo positivo forma con la retta radiale OQ un angolo congruente a \widehat{AQO} , mentre \vec{E}_- forma con la stessa retta l'angolo \widehat{OQB} ; entrambi questi angoli sono non nulli per tutti i punti diversi dagli estremi della semicirconferenza.

Soluzione alternativa

I punti di equilibrio si possono determinare anche calcolando il potenziale elettrostatico in ogni punto della circonferenza e cercandone i punti di massimo (equilibrio instabile) o di minimo (equilibrio stabile) relativo.

Il potenziale elettrostatico a distanza r dal filo con carica λ , a meno di una costante additiva arbitraria, si determina come

$$V(r) = - \int E(r) dr = - \int \frac{2k_{\text{es}}\lambda}{r} dr = -2k_{\text{es}}\lambda \ln r.$$

Con il teorema di Carnot si determinano le distanze dai due fili; esse valgono rispettivamente ⁽¹⁾

$$r_+ = \sqrt{a^2 + 4a^2 - 4a^2 \cos(\pi - \beta)} = a\sqrt{5 + 4 \cos \beta}$$

$$r_- = \sqrt{a^2 + 4a^2 - 4a^2 \cos \beta} = a\sqrt{5 - 4 \cos \beta}$$

e dunque il potenziale elettrostatico sulla circonferenza di raggio $2a$ risulta

$$V(\beta) = k_{\text{es}} \lambda \ln \frac{5 - 4 \cos \beta}{5 + 4 \cos \beta} = k_{\text{es}} \lambda \ln [f(\beta)] \quad \text{con} \quad f(\beta) = \frac{5 - 4 \cos \beta}{5 + 4 \cos \beta}.$$

Si osserva che il potenziale così determinato si annulla per $\beta = \pi/2$ come mostrato in figura.

Derivando rispetto a β si ha

$$\frac{dV}{d\beta} = \frac{dV}{df} \frac{df}{d\beta} = k_{\text{es}} \lambda \frac{5 + 4 \cos \beta}{5 - 4 \cos \beta} \frac{4 \sin \beta (5 + 4 \cos \beta) + 4 \sin \beta (5 - 4 \cos \beta)}{(5 + 4 \cos \beta)^2} = \frac{40 k_{\text{es}} \lambda \sin \beta}{25 - 16 \cos^2 \beta}$$

che si annulla per $\sin \beta = 0$ ovvero per $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = \pi$. In un intorno di $\beta_1 = 0$ si può porre $\sin \beta \approx \beta$ e $\cos \beta \approx 1$ per cui si ha

$$\frac{dV}{d\beta} \approx \frac{40}{9} k_{\text{es}} \lambda \beta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 V}{d\beta^2} > 0$$

indicando che in $\beta = 0$ si ha un minimo del potenziale e dunque un punto di equilibrio stabile per la carica $q > 0$. In modo analogo si prova che in $\beta_2 = \pi$ si ha un massimo del potenziale, cioè un punto di equilibrio instabile.

Quesito n. 4.

Il potenziale elettrostatico, determinato al punto precedente, nei punti di equilibrio instabile ($\beta = \pi$) e stabile ($\beta = 0$) vale rispettivamente

$$V(\pi) = k_{\text{es}} \lambda \ln 9 \quad \text{e} \quad V(0) = k_{\text{es}} \lambda \ln(1/9) = V(-\pi) \quad \Rightarrow \quad \Delta V = V(\pi) - V(0) = 2k_{\text{es}} \lambda \ln 9.$$

Per la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} m v^2 = q \Delta V \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2q \Delta V}{m}} = 2 \sqrt{\frac{k_{\text{es}} \lambda q}{m}} \ln 9.$$

Quesito n. 5.

Senza perdita di generalità si può ipotizzare che la velocità dei fili sia diretta fuori dal piano del foglio. Adesso i fili carichi in movimento si comportano come due fili percorsi da correnti uguali in versi opposti. Per il filo carico positivamente la corrente, in verso uscente dal piano di figura, è

$$I = \frac{dq}{dt} = \lambda \frac{dx}{dt} = \lambda v.$$

I campi \vec{B}_+ e \vec{B}_- sono in ogni punto nello stesso piano del foglio e sono perpendicolari rispettivamente ai campi \vec{E}_+ e \vec{E}_- (v. figura S-3) dato che le linee di ciascun campo elettrico sono radiali rispetto al filo mentre quelle del corrispondente campo magnetico sono circonferenze con il centro sul filo.

I moduli dei campi magnetici valgono ⁽²⁾

$$B_+ = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r_+} \quad B_- = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r_-}$$

⁽¹⁾ Osservare che in figura 2 risulta $\beta > \pi/2$ per cui $\cos \beta < 0$ e quindi $r_+ < r_-$.

⁽²⁾ In realtà nell'espressione dei moduli dei campi si dovrebbe usare la densità di carica contratta per contrazione di Lorentz al valore $\lambda' = \lambda / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Questa osservazione non invalida naturalmente il risultato che è quindi valido qualsiasi sia il modulo di \vec{v} .

e sono quindi proporzionali ai moduli dei campi elettrici

$$E_+ = \frac{2k_{es}\lambda}{r_+} \quad E_- = \frac{2k_{es}\lambda}{r_-}$$

con lo stesso coefficiente di proporzionalità

$$\frac{B_+}{E_+} = \frac{B_-}{E_-} = \frac{\mu_0 \lambda v}{4\pi k_{es} \lambda} = \frac{\mu_0 v}{4\pi k_{es}}.$$

Ne segue che anche il campo risultante

$$\vec{B} = \vec{B}_+ + \vec{B}_-$$

è perpendicolare al campo

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad \text{e il suo modulo vale}$$

$$B = \frac{\mu_0 v}{4\pi k_{es}} E = \mu_0 \epsilon_0 v E = \frac{v}{c^2} E \quad \Rightarrow \quad vB = \left(\frac{v}{c}\right)^2 E.$$

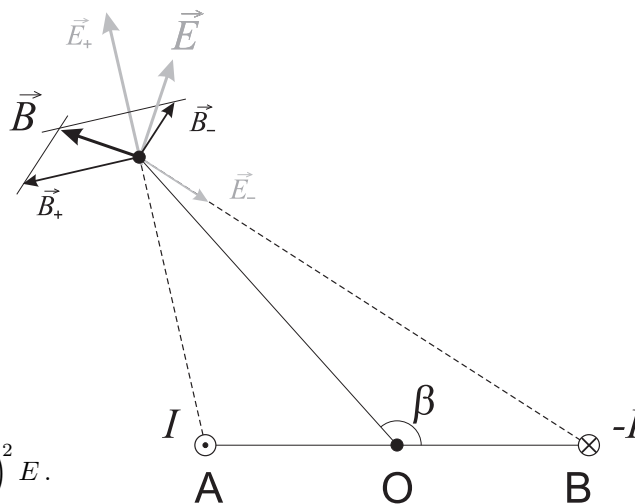


Figura S-3

Materiale elaborato dal Gruppo



PROGETTO OLIMPIADI
Segreteria delle Olimpiadi Italiane di Fisica

e-mail: segreteria@olifis.it
WEB: www.olifis.it



NOTA BENE

È possibile utilizzare, riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico questo materiale alle due seguenti condizioni: citare la fonte; non usare il materiale, nemmeno parzialmente, per fini commerciali.

Le Olimpiadi di Fisica
sono organizzate dall'AIF
su mandato del



MINISTERO DELL'ISTRUZIONE